БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН БЕЛАРУСИ

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ: УСТОЙЧИВОСТЬ, УПРАВЛЕНИЕ, ОПТИМИЗАЦИЯ

Материалы Международной научной конференции
памяти профессора Р.Ф. Габасова

Минск, 5–10 октября 2021 г.

DYNAMICAL SYSTEMS: STABILITY, CONTROL, OPTIMIZATION

Proceedings of the International Scientific Conference
in memory of Professor R.F. Gabasov

Minsk, October 5–10, 2021

МИНСК
БГУ
2021

УДК 517.93(06) + 517.977(06)
ББК 22.161.6я431
Д46

Д46 **Динамические** системы: устойчивость, управление, оптимизация = Dynamical systems: stability, control, optimization : материалы Междунар. науч. конф. памяти профессора Р. Ф. Габасова, Минск, 5–10 окт. 2021 г. / Белорус. гос. ун-т ; редкол.: Ф. М. Кириллова (гл. ред.) [и др.]. – Минск : Изд. центр БГУ, 2021. – 213 с.
ISBN 978-985-553-732-9.

Издание содержит материалы докладов, представленных на Международной научной конференции «Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация» памяти профессора Р. Ф. Габасова. Тематика докладов касается проблем качественной и конструктивной теории управления системами обыкновенных, дифференциально-алгебраических, дифференциально-разностных, сингулярно-возмущенных уравнений, системами с распределенными параметрами, а также приложений в экономике, биологии, технике.

УДК 517.93(06) + 517.977(06)
ББК 22.161.6я431

ISBN 978-985-553-732-9

ОРГАНИЗАТОРЫ

Белорусский государственный университет
Институт математики НАН Беларуси

МЕЖДУНАРОДНЫЙ ПРОГРАММНЫЙ КОМИТЕТ

Сопредседатели:

академик РАН Куржанский А.Б. (Москва, Россия)
член-корр. НАН Беларуси Кириллова Ф.М. (Минск, Беларусь)

Члены Программного комитета:

Алиев Ф.А. (Азербайджан)
Allgöwer F. (Германия)
Ащепков Л.Т. (Канада)
Гороховик В.В. (Беларусь)
Калинин А.И. (Беларусь)
Карелин В.В. (Россия)
Kruger A. (Австралия)
Мансимов К.Б. (Азербайджан)
Mordukhovich B.Sh. (США)
Pham The Long (Вьетнам)
Половинкин Е.С. (Россия)
Срочко В.А. (Россия)
Субботина Н.Н. (Россия)
Ушаков В.Н. (Россия)
Чикрий А.А. (Украина)
Shklyar B.Sh. (Израиль)

ОРГКОМИТЕТ

Председатель:

Недзьведь А.М. (Белорусский государственный университет)

Заместители председателя:

Дмитрук Н.М. (Белорусский государственный университет)
Костюкова О.И. (Институт математики НАН Беларуси)

Ответственный секретарь: Альсевич В.В. (БГУ)

Члены Оргкомитета:

Асмыкович И.К. (БГТУ), Астровский А.И. (БГЭУ), Борухов В.Т. (ИМ НАНБ), Габасова О.Р., Дымков М.П. (БГЭУ), Калитин Б.С. (БГУ), Крахотко В.В. (БГУ), Лепин В.В. (ИМ НАНБ), Лавринович Л.И. (БГУ), Метельский А.В. (БНТУ), Минченко Л.И. (БГУИР), Павленок Н.С. (БГУ)

ГАБАСОВ Рафаил (1935–2020)

заслуженный деятель науки Республики Беларусь
доктор физико-математических наук, профессор

Габасов Рафаил Федорович родился 17 декабря 1935 года в г. Магнитогорске Челябинской области (Российская Федерация). После окончания семилетней школы, а затем Индустриального техникума (колледжа) поступил на механический факультет Уральского политехнического института в г. Свердловске (ныне Екатеринбург), который окончил в 1958 г. Этот институт стал для Р.Ф. Габасова стартовой площадкой в большую науку. Там он окончил аспирантуру и в 1963 г. защитил кандидатскую диссертацию на тему "Некоторые вопросы качественной теории регулируемых систем" (Казанский государственный университет), где для решения задач устойчивости движения и оптимального управления развил методы расчетов, предложенные его научными руководителями — академиками Е.А. Барбашиным и Н.Н. Красовским.

С 1964 по 1967 г. Р.Ф. Габасов работал старшим научным сотрудником в Уральском филиале Академии наук СССР г. Свердловск. В 1963 – 1967 гг. он занимался оптимальным управлением и успешно использовал нестандартные ограничения управляющих воздействий (управление с ограничением по циклам), а также актуальной для того времени проблемой существования оптимальных управлений (оптимизация выпуклых функционалов на траекториях линейных систем).

В конце 1967 г. Р.Ф. Габасов по приглашению академика АН Беларуси Е.А. Барбашина переехал в Минск и возглавил только что созданную на математическом факультете Белорусского государственного университета кафедру прикладной математики. В 1970 г. кафедра стала структурным подразделением нового факультета прикладной математики и была переименована в кафедру методов оптимального управления. Руководил ею Р.Ф. Габасов до июля 2000 г., в 2000 – 2018 гг. он работал на кафедре в должности профессора, где продолжил научную работу.

В стенах Белорусского государственного университета наиболее ярко расцвел его научный и педагогический талант. В 1968 г. Р.Ф. Габасов защитил докторскую диссертацию “Математические вопросы оптимизации систем управления (Белорусский государственный университет), в которой были получены фундаментальные результаты по проблеме управляемости систем с запаздываниями, существования оптимальных управлений и принципе квазимаксимума для дискретных систем. Кроме того, была разработана теория особых оптимальных управлений и универсальная форма представления необходимых условий оптимальности с помощью вариационных производных.

В 1971 г. Р.Ф. Габасову присвоено ученое звание профессора.

Трудно в коротком сообщении перечислить направления научных исследований, автором или одним из создателей которых является Рафаил Федорович.

Кроме проблемы относительной управляемости, которая полностью решается с помощью определяющих уравнений для систем с последействием, была решена и проблема полной управляемости систем с последействием.

Для установления критериев существования оптимальных управлений в системах с запаздываниями Р.Ф. Габасов использовал формулы приращения скалярных функций, а не конструкции А.Ф. Филиппова и Р.В. Гамкрелидзе.

Параллельно с исследованиями особых оптимальных управлений была разработана теория условий оптимальности высокого порядка, которые усиливают принцип максимума на особых участках, т.е. когда принцип максимума не дает достаточную информацию для распознавания неоптимальных управлений.

Отмеченные проблемы относятся к качественной теории оптимального управления.

В 1970-х гг. Р.Ф. Габасовым (совместно с Ф.М. Кирилловой) предложен и обоснован новый подход к решению задач линейного программирования, на базе которого созданы методы и разработаны алгоритмы решения задач математического программирования и оптимального управления. Эти работы положили начало крупному направлению, известному как конструктивные методы оптимизации. Созданный адаптивный метод для задач линейного программирования был перенесен на более сложные задачи: квадратичного, кусочно-линейного, дробно-линейного программирования и задачи оптимального управления.

Полученные алгоритмы решения указанных задач были реализованы учениками Рафаила Федоровича в виде программ для ЭВМ и изданы в серии выпусков по программному обеспечению экстремальных задач "Адаптивная оптимизация" Фондом алгоритмов и программ Академии наук Беларуси (1983–1993).

За цикл работ по конструктивной теории экстремальных задач в 1995 г. Р.Ф. Габасову присуждена премия НАН Беларуси.

Р.Ф. Габасовым и учениками был разработан подход к решению проблемы синтеза оптимальных связей для линейных динамических систем управления. В основе алгоритма по реализации лежат: дискретность управляющих воздействий, редукция последовательности оптимальных программ к задачам линейного программирования и двойственный метод линейного программирования для коррекции опор. Были обоснованы алгоритмы построения размыкаемых, замыкаемых и замкнутых связей.

После создания на факультете прикладной математики и информатики специальности "Экономическая кибернетика" Р.Ф. Габасов приступил к исследованию задач оптимизации экономических процессов. В соавторстве написано учебное пособие "Оптимизация линейных экономических моделей" (Мн., БГУ, 2000).

Методы теории оптимального управления были перенесены и на задачи экономики. В них методами оптимального управления построены программные и позиционные решения динамических задач микрои макроэкономики.

Р.Ф. Габасов являлся одним из создателей белорусской научной школы по оптимизации и оптимальному управлению.

Р.Ф. Габасовым опубликовано более 600 научных работ, в том числе 8 монографий (в соавторстве): “Качественная теория оптимальных процессов” — М., 1971 (переведена в США); “Оптимизация линейных систем” — Мн., 1973 (переведена в США и Японии); “Особые оптимальные управления” — М., 1973 (переведена в США); “Принцип максимума в теории оптимального управления” — Мн., 1974; “Основы динамического программирования” — Мн., 1975; “Методы линейного программирования” (в 3 ч.) — Мн., 1977–1980; “Конструктивные методы оптимизации” (в 5 ч.) — Мн., 1984–1998; “Optimal feedback control” — Springer, 1995. Результаты научной деятельности Р.Ф. Габасова широко известны во всем мире. Он выступал с докладами на самых представительных научных форумах, читал лекции в университетах многих стран Европы, Азии и США.

Р.Ф. Габасов неоднократно получал гранты Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований и Министерства образования РБ.

Трудно переоценить заслуги профессора Р.Ф. Габасова в подготовке научных кадров. Среди его учеников 9 докторов и 68 кандидатов наук. Они работают в Национальной академии наук Беларуси, почти во всех вузах страны, во многих университетах и научных центрах СНГ, США, Канады, Австралии, Германии, Болгарии, Литвы, Украины, Израиля, Китая, КНДР, Вьетнама, Сирии, Афганистана, Алжира, Гвинеи. За заслуги в подготовке специалистов высокой квалификации Р.Ф. Габасов в 2000 г. награжден Почетной грамотой Президиума ВАК Республики Беларусь, а в 2001 г. — медалью СР Вьетнам “За заслуги в просвещении”.

Р.Ф. Габасов был не только выдающимся ученым, но и прекрасным педагогом. Его лекции отличались глубиной изложения материала и педагогическим мастерством.

Вышли три издания учебного пособия (в соавторстве) – “Методы оптимизации” (1975, 1981, 2011 гг.), которое переведено в США, Китае, Узбекистане, Таджикистане. Как правило, профессор Рафаил Федорович читал лекции на основе собственных научных и научно-методических разработок. По его глубокому убеждению, лектор должен внести свой вклад в область тех знаний, которые он передает студентам.

За плодотворную деятельность в сфере образования Р.Ф. Габасов неоднократно награждался Почетными грамотами БГУ и Минвуза БССР.

В 1982 г. Р.Ф. Габасову было присвоено звание “Заслуженный деятель науки БССР”. Он награжден Почетной грамотой Верховного Совета Республики Беларусь (1995). Профессор Габасов — почетный доктор наук Иркутского государственного университета (1995), член Петровской академии наук и искусств в г. Санкт-Петербург (1993).

В 2005 г. был награжден нагрудным знаком “Отличник образования”, в 2010 г. ему присвоено звание “Заслуженный работник БГУ”.

Рафаилу Федоровичу были присущи неиссякаемая энергия, оптимизм, титаническое трудолюбие, фанатичное увлечение наукой, требовательность к себе и ученикам. За неделю до ухода из жизни он звал к себе учеников, чтобы обсудить новое издание учебника по методам оптимизации и идеи исследования современных задач.

И любой, кто хоть раз сталкивался с Рафаилом Федоровичем, по долгу службы либо в неформальной обстановке, не мог не отдать должное целеустремленности этого выдающегося Человека Науки. Его ум, талант, трудолюбие, отеческое отношение к тем, с кем он работал, навсегда останутся в памяти его благодарных учеников.

ON DISCRETE APPROXIMATION OF SET-MEMBERSHIP ESTIMATION FOR CONTINUOUS DYNAMICAL SYSTEMS

B.I. Ananyev, P.A. Yurovskih

Institute of Mathematics and Mechanics UB of RAS, Yekaterinburg, Russia
abi@imm.uran.ru, polina2104@list.ru

Introduction. Set-membership approaches to estimation problems have been studied since long time [1, 2]. More widely applicable and universal guaranteed approach was elaborated in monographs [3, 4]. In this talk, we continue the investigation of discrete approximations of state estimation problems for continuous dynamical systems [5].

1. Problem Formulation. Consider non-observable dynamical system with noisy measurement

$$\dot{x} = f(t,x),\ t \in [0,T],\ y(t) = g(t,x(t)) + w(t),\ x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R}^m, \quad (1)$$

where the unknown function $w \in L_2^m[0,T]$ is bounded by the norm: $\|w\|_{L_2^m} \le 1$. Continuous functions f, g are supposed to have continuous gradients f_x, g_x. The initial state x_0 is also unknown and $x_0 \in X_0$, where X_0 is a bounding set. According to [4] let us introduce the *information set* (IS) $\mathbf{X}(t, X_0, y)$ containing all the states $x(t)$ for which there exists an admissible pair x_0, w that generates this state by virtue of system (1). If $X_0 = \mathbb{R}^n$ the IS is denoted by $\mathbf{X}(t,y)$.

Given $y(\cdot)$, our problem is *to find IS* $\mathbf{X}(t,X_0,y)$ *and elaborate numerical schemes for approximations of IS.*

2. Discrete Approximation Scheme. First of all we give the theorem that helps in finding of IS especially for linear case. Let $\mathcal{X}(t,X_0)$ be the image of X_0 at the time t according to system (1).

Theorem 1. *The IS* $\mathbf{X}(t,X_0,y)$ *is the intersection* $\mathcal{X}(t,X_0)\bigcap \mathbf{X}(t, y)$. *The set* $\mathbf{X}(t,y) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid W(t,x,y(\cdot)) \le 1\}$, *where function* W *is defined by Bellman's equation* $W_t + W_x f(t,x) = \|y(t) - g(t,x)\|^2$ *with initial condition* $W(0,x,y(\cdot)) = 0$.

The proof of the theorem is based on the equality

$$\|w\|^2_{L_2^m[0.t]} = \int\limits_0^t \|y(s) - g(s,x(s))\|^2 ds.$$

Let N be a natural number and $\Delta = T/N$ be a step on the time axis. Consider the Euler approximation of system (1):

$$x_{k+1} = x_k + \Delta f(k\Delta, x_k), \quad k \in 0 : N-1. \tag{2}$$

For system (2), we form recurrently the following sets ($\mathbf{X}_0 = X_0,\ J_0 = 0$):

$$\begin{gathered} \hat{X}_k = \{x \in \mathbf{X}_k \mid J_{k+1}(x) \le 1\}, \quad \mathbf{X}_{k+1} = \hat{X}_k + \Delta f(k\Delta, \hat{X}_k), \\ J_{k+1}(x) = J_k(x) + \int\limits_{k\Delta}^{(k+1)\Delta} \|y(t) - g(t,x)\|^2 dt, \quad k \in 0 : N-1. \end{gathered} \tag{3}$$

Theorem 2. *Let X_0 be a compact set and IS $\mathbf{X}(T, y)$ be bounded. Then the sets $\mathbf{X}_N$ from (3) converge to IS $\mathbf{X}(T, X_0, y)$ in Hausdorff metric as $N \to \infty$.*

Various cases. Examples. If the system (1) is linear, i.e. $f(t,x) = A(t)x$, $g(t,x) = G(t)x$, then IS $\mathbf{X}(T,y)$ is an ellipsoid provided that the system is observable. In this case, it is better to approximate the initial set with an ellipsoid $\{x \mid (x-\bar{x})'P_0(x-\bar{x}) \le 1\} \supset X_0$ and to use equations from [5]. The system of the more complicated form $\dot{x} = f(t,x) + bv(t),\ y(t) = g(t,x) + cv(t)$, where $\|v\|_{L_2^q} \le 1$, is also taken into consideration. Examples are considered. Among them: an oscillator, double integrator and others.

The work was performed as part of research conducted in the Ural Mathematical Center with the financial support of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation.

References

1. *Schweppe F.C.* Recursive state estimation: unknown but bounded errors and system inputs // IEEE Trans. on Autom. Control, 1968. Vol. 13. P. 22–28, 1968.
2. *Bertsekas D.P., Rhodes I.B.* Recursive state estimation for a set-membership description of uncertainty // IEEE Trans. on Autom. Control. 1971. Vol. 16. P. 117–128.
3. *Kurzhanski A.B.* Upravlenie i nablyudenie v usloviyach neopredelennosti (Control and estimation under uncertainty). Moscow: Nauka, 1977, 306 p.
4. *Kurzhanski A., Varaiya P.* Dynamics and Control of Trajectory Tubes: Theory and Computation. SCFA. Boston: Birkhäuser, 2014, 445 p.
5. *Ananyev B.I., Yurovskih P.A.* Approksimatsiya zadachi garantirovannogo otsenivaniya so smeshannymi ogranicheniyami (Approximation of the guaranteed estimation problem with mixed limitations) // Proceedings of IMM UB of RAS. 2020. Vol. 26. No. 4. P. 48–63.

ON THE STRUCTURE OF THE LEVINSON CENTER FOR MONOTONE DISSIPATIVE NON-AUTONOMOUS DYNAMICAL SYSTEMS

D. Cheban

Moldova State University, Chişinău, Republic of Moldova
cheban@usm.md, davidcheban@yahoo.com

This talk is dedicated to the study the structure compact global attractor (Levinson center) of monotone dynamical systems.

Let $W \subseteq \mathbb{R}^n$. Consider the differential equation

$$u' = f(t,u) \quad (f \in C(\mathbb{R} \times W, \mathbb{R}^d)). \tag{1}$$

Along with the equation (1) we consider its H-class, i.e., the family of the equations

$$v' = g(t,v) \quad (g \in H(f) = \overline{\{f_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}}), \tag{2}$$

where $f_\tau(t,u) = f(t+\tau,u)$ and by bar is indicated the closure in the compact-open topology.

Below we will use the following conditions.

Condition (A1). The function $f \in C(\mathbb{R} \times W, \mathbb{R}^d)$ is said to be regular if for every equation (2) the conditions of existence, uniqueness and extendability on $\mathbb{R}_+$ are fulfilled.

We will suppose that the function f is regular. Denote by $\varphi(\cdot, v, g)$ the solution of (2) passing through the point $v \in W$ for $t = 0$. Then the mapping $\varphi : \mathbb{R}_+ \times W \times H(f) \to W$ satisfies the following conditions:

1) $\varphi(0,v,g) = v$ for all $v \in W$ and $g \in H(f)$;
2) $\varphi(t, \varphi(\tau, v, g), g_\tau) = \varphi(t+\tau, v, g)$ for each $v \in W$, $g \in H(f)$ and $t, \tau \in \mathbb{R}_+$;
3) $\varphi : \mathbb{R}_+ \times W \times H(f) \to W$ is continuous.

Denote by $Y := H(f)$ and $(Y, \mathbb{R}, \sigma)$ a dynamical system of translations on Y, induced by the dynamical system of translations $(C(\mathbb{R} \times W, \mathbb{R}^d), \mathbb{R}, \sigma)$. The triple $\langle W\varphi, (Y, \mathbb{R}, \sigma)\rangle$ is a cocycle over $(Y, \mathbb{R}_+, \sigma)$ with the fiber $\mathbb{R}^d$. Hence, the equation (1) generates a cocycle $\langle W, \varphi, (Y, \mathbb{R}, \sigma)\rangle$ and the non-autonomous dynamical system $\langle (X, \mathbb{R}_+, \pi), (Y, \mathbb{R}, \sigma), h\rangle$, where $X := W \times Y$, $\pi := (\varphi, \sigma)$ and $h := pr_2 : X \to Y$.

Condition (A2). The function $f \in C(\mathbb{R} \times W, \mathbb{R}^d)$ is Bohr/Levitan almost periodic in $t \in \mathbb{R}$ uniformly in u on every compact subset $K \subset W$.

Condition (A3). Equation (1) is monotone, i.e., the cocycle $\langle W, \varphi, (H(f), \mathbb{R}, \sigma)\rangle$ (or shortly φ) generated by (1) is monotone (this means that, if $u, v \in W$ and $u \leq v$ then $\varphi(t, u, g) \leq \varphi(t, v, g)$ for all $t \geq 0$ and $g \in H(f)$) and $\mathbb{R}^n_+$ is positively invariant with respect to cocycle φ ($\varphi(t, u, g) \in \mathbb{R}^n_+$ for any $(t, u, g) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n_+ \times H(f)$).

Condition (A4). Equation (1) with regular right hand side f admits a compact global attractor (Levinson center), i.e., for any $g \in H(f)$ there exists a nonempty compact subset I_g of $\mathbb{R}^n$ such that the family $\{I_g | \ g \in H(f)\}$ possesses the following properties:

1. there exists a nonempty compact subset K of $\mathbb{R}^n$ such that $I_g \subseteq K$ for any $g \in H(f)$ and, consequently, $\mathbf{I} = \bigcup\{I_g | \ g \in H(f)\}$ is pre-compact;
2. $\{I_g | \ g \in H(f)\}$ is invariant, i.e., $\varphi(t, I_g, g) = I_{\sigma(t,g)}$ for any $g \in H(f)$ and $t \geq 0$;
3. $\{I_g | \ g \in H(f)\}$ uniformly attracts every bounded subset of $\mathbb{R}^n$, i.e., for any bounded subset M of $\mathbb{R}^n$ we have

$$\lim_{t \to +\infty} \sup_{g \in H(f)} \beta(\varphi(t, M, g), \mathbf{I}) = 0, \tag{3}$$

where $\beta(A, B) := \sup\limits_{a \in A} \rho(a, B)$, $\rho(a, B) := \inf\limits_{b \in B} \rho(a, b)$ and ρ is the distance defined by norm $|\cdot|$ on the space $\mathbb{R}^n$.

Condition (A5). For every $g \in H(f)$ and $v_0 \in \mathbb{R}^n_+$ the solution $\varphi(t, v_0, g)$ of equation (2) is positively uniformly stable, i.e., for any positive number ε there exists a positive number $\delta = \delta(\varepsilon, v_0, g)$ ($v \in \mathbb{R}^n_+$) such that $\rho(\varphi(t_0, v, g), \varphi(t_0, v_0, g)) < \delta$ ($t_0 \geq 0$) implies $\rho(\varphi(t, v, g), \varphi(t, v_0, g)) < \varepsilon$ for any $t \geq t_0$.

The main result of this talk we formulate in the following Theorems.

Theorem 1. *Under the conditions **(A1)-(A5)** there exists at least two points $u \in I_f$ such that the solution $\varphi(t, u, f)$ of equation (1) belonging to compact global attractor $\{I_g | \ g \in H(f)\}$ and it is Bohr/Levitan almost periodic.*

Condition (A6). Equation (1) has a strongly monotone first integral, i.e., there exists a function $V \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ such that $\nabla V(x) \gg 0$ (or equivalently, $V'_{x_i}(x) > 0$ for any $i = 1, \ldots, n$ and $x \in \mathbb{R}^n$).

Theorem 2. *Under the conditions **(A1)** – **(A4)** and **(A6)** the following statements hold:*

1. *for any $u \in I_f$ the solution $\varphi(t,u,f)$ of equation (1) belonging to compact global attractor $\{I_g|\ g \in H(f)\}$ and it is Bohr/Levitan almost periodic;*
2. *for any $u \in \mathbb{R}^n \setminus I_f$ there exists a point $u_f \in I_f$ such that*
   (a) *the solution $\varphi(t,u_f,f)$ of equation (1) belonging to compact global attractor $\{I_g|\ g \in H(f)\}$ and it is Bohr/Levitan almost periodic;*
   (b) *the solution $\varphi(t,u,f)$ of equation (1) is asymptotic to solution $\varphi(t,u_f,f)$, i.e.,*

$$\lim_{t\to+\infty} \rho(\varphi(t,u,f),\varphi(t,u_f,f)) = 0. \qquad (4)$$

Denote by $\mathfrak{A}$ (respectively, $\mathfrak{B}$) the family of all equations (1) satisfying conditions **(A1)** – **(A5)** (respectively, **(A1)** – **(A4)** and **(A6)**).

Remark. Note that

1. $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$;
2. the inclusion $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ is not true even for scalar ($n = 1$) differential equations (see [1, Ch.XII]).

References

1. *Cheban D.N.* Global Attractors of Nonautonomous Dynamical and Control Systems. 2nd Edition. Interdisciplinary Mathematical Sciences. Vol.18. River Edge, NJ: World Scientific, 2015, xxv+589 pp.

TIME STRETCHING IN THE GAME METHOD OF RESOLVING FUNCTIONS

G.TS. Chikrii, A.A. Chikrii

V.M. Glushkov Institute of Cybernetics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine

{g.chikrii, ark.chikrii}@gmail.com

In the development of the first direct method of L.S. Pontryagin [1], the method of resolving functions was developed [2]. These methods provide a guaranteed result without worrying about optimality that is quite justified from a practical point of view.

The deciding factor in study of dynamic games is availability of information on current state of the process, its prehistory or various-kind discrimination of the players. It was shown that the general quasi-linear game of pursuit with variable delay of information is equivalent to the pursuit game with complete information and somewhat changed dynamics and terminal set [3]. On the one hand, this made it possible to apply classic methods to analyze a wide class of pursuit games with delayed information. On the other hand, this turns out to be useful to tackle game problems of pursuit, for which Pontryagin's condition [1], lying at the heart of the first direct method and reflecting an advantage of the pursuer over the evader in control resources, does not hold. These are the problems of soft meeting (simultaneous coincidence of states and velocities of the players) and problems of pursuit for oscillatory processes [2].

M.S. Nikolskij in [4] provided a deep insight into the condition, resulted in its modification by D. Zonnevend [5], which incorporates certain function later on called the function of time stretching. It was shown that the modified condition is closely related with the passage from original game to the game with special kind information delay [3]. This gave impetus to the development of efficient approach — the principle of time stretching to analyze the games that do not meet Pontryagin's condition. The concept of time stretching function was extended to the function being a sum of piecewise continuous and absolutely continuous functions [6]. This made it feasible to expand the range of problems susceptible to analytical solution, in particular, at the account of oscillatory systems. In the frames of Pontryagin's first direct method, the time stretching principle was applied for solving the problems of soft meeting in various cases of second-order dynamics. Formulas of the function of time stretching in explicit form were obtained for oscillatory processes and in the case of different-kind dynamics of the players [6]. This approach was implemented for analysis of the dynamic games, described by a system of general form, which encompasses a wide range of the functional-differential systems [7]. Also, it was applied to the method of resolving functions and its modifications related with the shift function and the upper and the lower resolving functions. This made it feasible to terminate the game using quasi- and stroboscopic strategies. As an illustration, one problem of approaching two conflict-controlled oscillatory systems was analyzed in detail.

References

1. *Pontryagin L.S.* Selected Scientific Papers 2. Moscow: Nauka, 1988 (in Russian).
2. *Chikrii A.A.* Conflict-Controlled Processes. Springer Science & Business Media, 2013.
3. *Chikrii G.Ts.* Using the effect of information delay in differential pursuit games // Cybernetics and Systems Analysis. 2007. Vol. 43. No. 2. P. 233–245.
4. *Nikolskij M.S.* Application of the first direct method in the linear differential games // Izvestia Akademii Nauk SSSR, tehn. cyb. 1972. No. 10. P. 51–56 (in Russian).
5. *Zonnevend D.* On one method of pursuit // Doklady Akademii Nauk SSSR. 1972. Vol. 204. No. 6. P. 1296–1299 (in Russian).
6. *Chikrii G.Ts.* Principle of time stretching in evolutionary games of approach // Journal of Automation and Information Sciences. 2016. Vol. 48. No. 5. P. 12–26.
7. *Chikrii G.Ts.* Principle of time stretching for motion control in condition of conflict. Chapter in the book "Advanced Control Systems: Theory and Applications". River Publishers. 2021. P. 52–82.

ERROR BOUNDS REVISITED

N.D. Cuong, A.Y. Kruger

Federation University, Ballarat, Australia
duynguyen@students.federation.edu.au, a.kruger@federation.edu.au

We propose a unifying general framework of quantitative primal and dual sufficient error bound conditions covering linear and nonlinear, local and global settings. We expose the roles of the assumptions involved in the error bound assertions, in particular, on the underlying space: general metric, Banach or Asplund. Employing special collections of slope operators, we introduce a succinct form of sufficient error bound conditions, which allows one to combine in a single statement several different assertions: nonlocal and local primal space conditions in complete metric spaces, and subdifferential conditions in Banach and Asplund spaces. In the nonlinear setting, we cover both the conventional and the 'alternative' error bound conditions.

Dedicated to the memory of Rafail Fedorovich Gabasov.

References

1. *Cuong N.D., Kruger A.Y.* Error bounds revisited // arXiv 2020. 2012.03941.

DISCRETE VOLTERRA OPERATOR AND ITS APPLICATIONS

M.P. Dymkov

Belarus State Economic University, Minsk, Belarus
dymkov_m@bseu.by

In this paper in framework of the uniformed view based on operator approach the main control problems such as stability, stabilizability, controllability, linear-quadratic optimization and feedback control problems are considered for linear discrete Volterra equations. It is shown that Volterra operator properties play a key role to study the main structural characteristics of the considered control system. Using the presentation of this operator in the ring of power series allows us to apply some algebraic methods for research.

Let E be a finite dimensional normed space over the complex field C with norm $|\cdot|_E$, and Z_+ be the set of nonnegative integers. Denote by $s(Z_+, E)$ the linear space of all sequences on E, i.e. the functions $f : Z_+ \to E$. Let $b(Z_+, E)$ be the subspace from $s(Z_+, E)$ of all bounded functions, i.e. the functions $f : Z_+ \to E$ such that $\sup\limits_{k \in Z_+} |f(k)|_E < +\infty$. Now let V be another finite dimensional normed spaces over complex field C, $A_t \in \mathcal{L}(E, E), t \in Z_+, B \in \mathcal{L}(V, E)$, where $\mathcal{L}(E, V)$ denotes the Banach space of all linear operators from E to V.

Define the Volterra operator $\mathcal{V} : s(Z_+, E) \to s(Z_+, E)$ as follows

$$(\mathcal{V}\varphi)(t) = \sum_{i=0}^{t} A_i \varphi(t-i),\ t \in Z_+. \tag{1}$$

Associate with each Volterra operator $\mathcal{V}$ its representation $\mathcal{V}(z)$ in the ring of power series defined by

$$\mathcal{V}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i z^i, \quad z \in C. \tag{2}$$

It is obvious that the matrix function $\mathcal{V}(z)$ is a linear map $E \to V$ for each z from the unit disk $\mathcal{D} = \{z \in C : |z| \le 1\}$. Now, suppose that the operators A_i are such that the power series (2) converge in some domain $\mathcal{G}$ containing the unit disk $\mathcal{D}$. Under given assumptions, $\mathcal{V}$ is a linear bounded operator. It can be proved the following prepositions.

Lemma 1. *The Volterra operator* $\mathcal{V} : b(Z_+, E) \to b(Z_+, E)$ *is i)surjective if, and only if,* $rank\mathcal{V}(z) = n$ $(n = dim\ E)$ *for all* $z \in C, |z| \leq 1$*; ii) injective if, and only if,* $rank\mathcal{V}(z) = n$ $(n = dim\ E)$ *for some* $z \in C, |z| \leq 1$.

The spectrum of the Volterra operator can be given as follows

Lemma 2. *The spectrum* $\Sigma(\mathcal{V})$ *of the operator* V *can be evaluated by the formulae*

$$\Sigma(\mathcal{V}) = \bigcup_{|z|\leq 1} \sigma(\mathcal{V}(z)), \tag{3}$$

where $\sigma(\mathcal{V}(z))$ *denotes eigenvalues of the matrix* $\mathcal{V}(z)$.

Consider the following system of equations

$$\sum_{i=0}^{s} A_i x(s-i) + B_s y = \beta_s \quad \text{for all} \quad s \in Z_+ \tag{4}$$

with respect to unknown $x \in b(Z_+, E)$, $y \in W$ under the given $\beta \in b(Z_+, E)$. This system is equivalent to the following equation in the ring of power series

$$\mathcal{V}(z)x(z) + B(z)y = \beta(z), \quad z \in \mathcal{D}. \tag{5}$$

Using this representation the following result can be proved

Theorem 1. *Equation* (4) *solvable in class* $b(Z_+, E)$ *for any* $\beta \in b(Z_+, V)$ *if and only if*

1) $\mathrm{rank}\mathcal{V}(z) = n_2 \quad (n_2 = \dim V) \quad \text{for all} \quad |z| = 1;$

2) $\dim\{\mathcal{L}_{z_1}[\mathcal{V}, B] + ... + \mathcal{L}_{z_r}[\mathcal{V}, B]\} = \rho(\mathcal{V}),$

$z_i \in R_V,\ i = 1, 2, ..., r$, *where the linear spaces* $\mathcal{L}_{z_i}[\mathcal{V}, B]$ *are constructed by special procedure with help of matrices* $\mathcal{V}(z)$, $B(z)$ *and the number* $\rho(\mathcal{V})$ *is the singularity power of the matrix* $\mathcal{V}(z)$ *in the unit disk* $\mathcal{D}$.

In the paper on the base of the obtained results the main control problems such as stability, stabilizability, controllability, linear-quadratic optimization and feedback control problems for some classes of linear discrete Volterra equations are investigated.

This work was supported in part by the State Programm of Scientific Research (grant 1-30/2021 B).

References

1. *Dymkov M.P.* Extremal problems for multidimensional control systems. Minsk: BSEU Publishing House, 2005.

GUARANTEE OPTIMIZATION IN PROBLEMS WITH FUNCTIONALLY CONSTRAINED SET OF DISTURBANCES

M.I. Gomoyunov, D.A. Serkov

Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics,
Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russia
{m.i.gomoyunov, d.a.serkov}@gmail.com

We deal with a problem of optimizing the guaranteed result for a dynamical system controlled under conditions of disturbances. A motion of the system is considered on a finite time interval and is described by an ordinary differential equation. Admissible controls are measurable functions with values in a given compact set. The goal of control is to minimize a cost functional, which evaluates system's motions.

In a classical formulation of such problems, admissible disturbances are usually assumed to satisfy two conditions similar to those imposed on admissible controls, i.e., instantaneous (or geometric) constraints coupled with the claim of measurability. In this case, the theory of zero-sum differential games can be involved to study and solve the problem. In particular, in order to obtain a constructive solution in the form of feedback (positional) controls, we can use, for example, the method of extremal aiming, developed within the positional approach (see, e.g., [1, 2]). At the same time, a direct application of many basic results of the differential games theory, including the method of extremal aiming [1, 2], requires (often implicitly) the following "gluing up" property: an admissible disturbance extended by any other one from any time composes a new admissible disturbance. On the other hand, there is a wide range of applied control problems in which standard two assumptions on the set of disturbances are supplemented by constraints of a functional nature. For example, they can be determined by such conditions as constancy, continuity, or Lipschitz continuity, as well as boundedness of a number of discontinuity points and compactness in some topology (see, e.g., [3]–[6]). Usually, by taking this additional information into account, we can significantly improve the value of optimal guaranteed result. However, under such functional constraints, the property of "gluing up" may no longer be satisfied. So, the presence of a functional constraint is the main feature of the considered guarantee optimization problem. Note that we do not fix a specific form of this constraint, and, in particular, the set of admissible disturbances may turn out to be hereditary.

Our aim is to provide a functional in the space of positions of the dynamical system that possesses suitable properties of u- and v-stability (see, e.g., [1, Sect. 4.2] and [2, Sect. 8]), which may allow to use this functional as a basis for obtaining optimal feedback controls via the extremal aiming technique. For these purposes we use the functional of the optimal guaranteed result with respect to non-anticipative control strategies. The construction is prompted by the classical result (see, e.g., [2, Sect. 9]) about the coincidence of the optimal guaranteed results in the classes of positional strategies and non-anticipative strategies under Isaacs' condition and similar results (see, e.g., [4, 7, 8]) under some other conditions imposed on the control problem. Note that dealing with the functional constraints may lead to a non-anticipative control strategy that differs from the standard ones. Namely, in considered case the appropriate class of strategies depends on the system's dynamics and the current history of the control process. Thus, the main result of the paper is the proof of the fact that the introduced functional satisfies the dynamic programming principle and, as a consequence, possesses the stability properties mentioned above.

The work was performed as part of research conducted in the Ural Mathematical Center with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Agreement number 075-02-2021-1383).

References

1. *Krasovskii N.N., Subbotin A.I.* Game-theoretical control problems. New York: Springer, 1988.
2. *Krasovskii A.N., Krasovskii N.N.* Control under lack of information. Boston: Birkhäuser, 1995.
3. *Barron E.N.* Differential games with Lipschitz control functions and fixed initial control positions // J. of Differential Equations. 1977. Vol. 26. Issue 2. P. 161–180.
4. *Kryazhimskii A. V.* The problem of optimization of the ensured result: unimprovability of full-memory strategies // Constantin Caratheodory: An International Tribute. Teaneck, New Jersey: World Scientific, 1991. Vol. 1. P. 636–675.
5. *Nikol'skij M.S.* A crossing problem with possible stop of engine // Differential Equations. 1993. Vol. 29. Issue 11. P. 1681–1684.
6. *Ukhobotov V.I.* On a control problem under disturbance and possible breakdown // Proc. of the Steklov Institute of Math., 2019. Vol. 307, suppl. 1. P. S159–S171.
7. *Serkov D.A.* On the unimprovability of full-memory strategies in problems of guaranteed result optimization // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 2015. Vol. 291, suppl. 1. P. S157–S172.
8. *Gomoyunov M.I., Serkov D.A.* On a solution of a guarantee optimization problem under a functional constraint on the disturbance // Dynamic Games and Applications. 2019. Vol. 9. No. 3. P. 700–723.

SUBDIFFERENTIABILITY OF FUNCTIONS THAT ARE ABSTRACT CONVEX WITH RESPECT TO THE SET OF LIPSCHITZ CONCAVE FUNCTIONS

V.V. Gorokhovik[1], **A.S. Tykoun**[2]

[1] Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
gorokh@mail.com

[2] Belarusian State University, Minsk, Belarus
tykoun@bsu.by

Abstract. For the functions defined on normed vector spaces we introduce the notion of the $\mathcal{L}\widehat{C}$-convexity that generalizes the classical notion of convex functions. A function f is called $\mathcal{L}\widehat{C}$-convex if it can be represented as the upper envelope of some subset of Lipschitz concave functions. In the terminology of abstract convexity [1] it means that f is abstract convex with respect to the set $\mathcal{L}\widehat{C}$ of Lipschitz concave functions. We prove [2, 3] that a function is $\mathcal{L}\widehat{C}$-convex if and only if it is lower semicontinuous and, in addition, it is bounded from below by a Lipschitz continuous function. For a function f and a point $x \in \operatorname{dom} f$ we introduce the notion of the $\mathcal{L}\widehat{C}$-subgradient as well as the notions of the $\mathcal{L}\widehat{C}$-presubdifferential and the $\mathcal{L}\widehat{C}$-subdifferential of f at x. We prove that for a $\mathcal{L}\widehat{C}$-convex function f the $\mathcal{L}\widehat{C}$-presubdifferential and the $\mathcal{L}\widehat{C}$-subdifferential of the function f are nonempty at any point of the dense subset of $\operatorname{dom} f$. This result extends the well-known Brøndsted-Rockafellar theorem on the existence of the Fenchel subdifferential of a convential convex function to the wider class of lower semicontinuous functions. As an application we derive the $\mathcal{L}\widehat{C}$-subdifferential criterium of global minimum and the $\mathcal{L}\widehat{C}$-subdifferential necessary condition of global maximum for a nonsmooth function.

References

1. *Rubinov A.M.* Abstract convexity and global optimization. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000.
2. *Gorokhovik V.V., Tykoun A.S.* Support points of lower semicontinuous functions with respect to the set of Lipschitz concave functions // Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus. 2019. Vol. 63. No. 6. P. 647–653.
3. *Gorokhovik V.V., Tykoun A.S.* Abstract convexity of functions with respect to the set of Lipschitz (concave) functions // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2020. Vol. 309, suppl. 1. P. S36–S46.

REGULARIZATION OF A COPOSITIVE OPTIMIZATION PROBLEM

O.I. Kostyukova[1], T.V. Tchemisova[2]

[1] Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
kostyukova@im.bas-net.by

[2] Department of Mathematics, University of Aveiro, Portugal
tatiana@ua.pt

Introduction. Copositive Programming (CoP) deals with optimization over the convex cone of *copositive matrices.* Copositive models arise in many important applications, including $\mathcal{NP}$ -hard problems [1]. In convex and conic optimization, optimality conditions and duality results are usually formulated under certain regularity conditions which are often not satisfied. Thus, the idea of a *regularization* appears quite naturally and is aimed at obtaining an equivalent and more convenient reformulation of the problem with some required properties, one of which is the generalized Slater condition.

In this paper, we present and justify a regularization algorithm for linear CoP. It is based on the concept of immobile indices which play an important role in the feasible sets' characterization [2].

1. Problem's statement Consider a linear CoP problem

$$\min_{x} \ c'x \quad \text{s.t. } x \in X := \{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{A}(x) \in \mathcal{COP}^p\}, \qquad (1)$$

where $\mathcal{COP}^p := \{D \in \mathbb{R}^{p\times p} : t'Dt \geq 0 \ \forall t \in T\}$, $T := \{t \in \mathbb{R}^p_+ : \sum_{k=1}^p t_k = 1\}$, is the cone of copositive matrices, $\mathcal{A}(x) = \sum_{j=1}^n A_j x_j + A_0$, $A_0 \in \mathcal{COP}^p$, matrices $A_j, j = 0, ..., n$, and vector c are given.

The constraints of problem (1) satisfy **the Slater condition** if
$\exists \bar{x} \in \mathbb{R}^n : \ \mathcal{A}(\bar{x}) \in \operatorname{int} \mathcal{COP}^p = \{D \in \mathbb{R}^{p\times p} : t'\mathcal{A}(\bar{x})t > 0 \ \forall t \in T\}$.

Lemma 1. *Given the linear copositive problem (1),*
(i) *the Slater condition is equivalent to the emptiness of set of normalized immobile indices* $T_{im} := \{t \in T : t'\mathcal{A}(x)t = 0 \ \ \forall x \in X\}$, *and*
(ii) *the normalized immobile index set* T_{im} *is empty or can be represented as a union of a finite number of convex closed bounded polyhedra.*

Suppose that $T_{im} \neq \emptyset$ and $V = \{\tau(i), i \in I\} \subset T_{im}, \ 0 < |I| < \infty$. Set $\sigma(V) := \min\{\tau_k(i), k \in P_+(\tau(i)), i \in I\} > 0$,

$\Omega(V) := \{t \in T : \rho(t, \mathrm{conv}V) \geq \sigma(V)\}$, where $\rho(t, \mathcal{B}) = \min_{\tau \in \mathcal{B}} ||t - \tau||_1$,

$P_+(t) := \{k \in \{1, 2, ..., p\} : \ t_k > 0\}$ for $t = (t_k, \ k = 1, ..., p)' \in \mathbb{R}^p_+$.

2. Regularization Algorithm for CoP

Initialization: $m := 0,\ I_0 := \emptyset,\ W_0 := \emptyset,\ \Omega(W_0) := T.$

Iteration $\#\ m,\ m \geq 0$. Solve a **regular** semi-infinite problem

$$\min_{(x,\mu)\in\mathbb{R}^{n+1}} \mu, \text{ s.t. } t'\mathcal{A}(x)t+\mu \geq 0,\ t \in \Omega(W_m),\ \mathcal{A}(x)\tau(i) \geq 0,\ i \in I_m. \quad (2)$$

If problem (2) admits a feasible solution $(\bar{x}, \bar{\mu})$ with $\bar{\mu} < 0$, then go to the *Final step* with $m_* := m$. Otherwise vector $(x = \mathbf{0}, \mu = 0)$ is an optimal solution of (2) and there exist indices, numbers, and vectors $\tau(i) \in \Omega(W_m),\ \gamma(i) > 0, i \in \Delta I_m,\ 1 \leq |\Delta I_m| \leq n+1;\ \lambda^m(i) \in \mathbb{R}^p_+,\ i \in I_m$, such that

$$\sum_{i\in\Delta I_m} \gamma(i)(\tau(i))' A_j \tau(i) + \sum_{i\in I_m} (\lambda^m(i))' A_j \tau(i) = 0,\ j = 0, 1, ..., n.$$

Set $I_{m+1} := I_m \cup \Delta I_m,\ W_{m+1} := \{\tau(i), i \in I_{m+1}\}$ and go to iteration $\#(m+1)$.

Final step. For some $m = m_* \geq 0$, the problem (2) has a feasible solution $(\bar{x}, \bar{\mu})$ with $\bar{\mu} < 0$. We prove that the CoP problem

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} c'x, \ \text{ s.t. } \ t'\mathcal{A}(x)t \geq 0,\ t \in \Omega(W_{m_*}),\ \mathcal{A}(x)\tau(i) \geq 0, i \in I_{m_*},$$

is equivalent to the original CoP problem (1) being its **regularization** since (a) $\mathcal{X}(W_{m_*}) := \{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{A}(x)\tau(i) \geq 0, i \in I_{m_*};\ t'\mathcal{A}(x)t \geq 0,$ $t \in \Omega(W_{m_*})\} = X$, (b) it has a finite number of linear constraints, and (c) by construction, $t'\mathcal{A}(\bar{x})t > 0, t \in \Omega(W_{m_*})$ for some $\bar{x} \in X$.

3. Conclusions. The proposed algorithm is based on the concept of immobile indices which permits to reduce a linear CoP problem to an equivalent regular SIP problem which can be solved numerically. The suggested approach permits to develop strong duality theory based on an explicit representation of the "regularized" feasible cone and the corresponding dual such as, e.g. the *Extended Lagrange Dual Problem* suggested for semidefinite problems in [3].

References

1. *Bomze I.M.* Copositive optimization — Recent developments and applications // EJOR. 2012. Vol. 216. No. 3. P. 509–520.
2. *Kostyukova O., Tchemisova T.* On equivalent representations and properties of faces of the cone of copositive matrices // Submitted to Optimization. 2020.
3. *Ramana M. V., Tuncel L., and Wolkowicz H.* Strong duality for Semidefinite Programming // SIAM J. Optimization. 1997. Vol. 7. No. 3. P. 641–662.

NONLINEAR MODEL OF DELTA ROBOT DYNAMICS AS A PARALLEL MANIPULATOR WITH THREE GEOMETRIC CONSTRAINTS

A.Ya. Krasinskiy

Moscow State University of Food Production, Moscow, Russia

Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

krasinsk@mail.ru

Parallel manipulators find more and more widespread use, since, due to the fact that their links work in tension or compression, they have a high stiffness of the actuator [1], and therefore a higher accuracy, as well as a much lower mass [2, 3]. In the presence of an adequate mathematical model, the modern level of development of the element base, control theory and information technologies allows to use control algorithms of almost any complexity in mechatronic systems quite reliably. Such algorithms are most easily implemented in systems with electric drives. However, the weight and size characteristics of the electric drive make its application in technical practice for movable links of the manipulator unprofitable, which imposes certain restrictions on its use. The design of the delta robot, a parallel manipulator invented by Reymond Clavel [4], freed the electric drive from this major drawback, since the actuators are stationary in this manipulator. The executive link of the delta robot, as in any manipulator with parallel kinematics, is the intersection of several kinematic chains. As a result, complex conditional relationships arise between the distances for the manipulator nodes and the coordinates of these nodes, which do not allow describing the system configuration by independent parameters. It is necessary to introduce coordinates in an amount exceeding the number of degrees of freedom of the system, which makes the Lagrange equations of the second kind inapplicable and extremely complicates the analytical solution of the inverse kinematics problem, which is necessary to construct a mathematical model of the dynamics of the system.

The authors are intensively developing the use of differentiated constraint equations and rigorous methods of analytical mechanics of systems with redundant coordinates [5] to obtain nonlinear models of systems with geometric constraints [6, 7]. The proposed application of the developed approach to the delta robot as a manipulator with three geometric constraints and three parallel kinematic chains made it possible to obtain a adequate mathematical model of its dynamics without any analytical solution of the inverse kinematics problem. The presence of a rigorous mathematical model makes it possible to use all the results of mathematical control theory in delta robot control problems. In particular, it is possible to determine the stabilizing control in the problem of stabilizing a given position of the gripper of a delta robot [8] by the method of N.N. Krasovskii [9].

References

1. *Yurevich E.I.* Fundamentals of Robotics. SPb: Publ.: BHV-Petersburg, 2018.
2. *Pashkevich A.P., Gomolitsky R.I.* Kinematics of parallel manipulators of quasi-orthogonal structure // Dokl. BSUIR. 2012. Vol. 5. No. 4. P. 150–155.
3. *Mirzaev R.A., Smirnov N.A.* Investigation of the kinematics of a parallel structure manipulator (delta mechanism) // Bulletin of SibGAU. 2012. P. 46–50.
4. *Clavel R.* Conception d'un robot parallele rapide'a 4degres de liberte // Ph.D. Thesis. EPFL, Lausanne, 1991. No. 925.
5. *Shulgin M.F.* On some differential equations of analytical dynamics and their integration // Tashkent. Scientific works of SAGU. 1958. Issue 144. 183 p.
6. *Krasinskiy A.Ya., Krasinskaya E.M.* Complex Application of the Methods of Analytical Mechanics and Nonlinear Stability Theory in Stabilization Problems of Motions of Mechatronic Systems // A. A. Radionov and A. S. Karandaev (Eds.): RusAutoCon 2019. LNEE 641. Springer Nature Switzerland AG 2020. P. 357–370.
7. *Krasinskiy A.Ya., Il'ina A.N., Krasinskaya E.M.* Stabilization of Steady Motions for Systems with Redundant Coordinates // Moscow University Mechanics Bulletin, 2019. Vol. 74. No. 1. P. 14–20.
8. *Krasinskiy A.Ya., Ni A.V., Yuldashev A.A.* On stabilization of a given position of the gripper of a delta robot // The Ninth Polyakhov's Reading Proc. of the Int. Scientific Conf. on Mechanics, March 9-12, 2021, Saint-Petersburg, Russia. P. 385–387.
9. *Krasovskii N.N.* Problems of stabilization of controlled motions // Malkin I. G. The theory of stability of motion. Moscow: Nauka, 1967. P. 475–514.

FIRST ORDER OPTIMALITY CONDITIONS FOR AN OPTIMAL CONTROL PROBLEM WITH NONLOCAL CONDITIONS UNDER IMPULSE ACTIONS

M.J. Mardanov, Ya.A. Sharifov

Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan

Baku State University, Baku, Azerbaijan

`misirmardanov@yahoo.com, sharifov22@rambler.ru`

We consider the following nonlocal boundary value problem under impulse actions:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u(t)),\ 0 \le t \le T,\ t \ne t_i,\ i = 1, 2, ..., p, \tag{1}$$

$$Ax(0) + \int\limits_0^T m\,(t)x\,(t)\,dt = C, \tag{2}$$

$$x(t_i^+) = x(t_i) + I_i(x(t_i)),\ i = 1, 2, ..., p,\ 0 < t_1 < t_2 < ... < t_p < T, \tag{3}$$

$$u\,(\cdot) \in U \subset L_2^r\,([0, T])\,, \tag{4}$$

where $x(t) \in R^n$; $f(t, x, u)$ is n-dimensional continuous and differentiable function with respect to (x, u); A, $m(t) \in R^{n \times n}$, $C \in R^{n \times 1}$ are the given matrices, moreover $\det N \ne 0$, $N = A + \int\limits_0^T m(t)dt$; $I_i : R^n \to R^n$, $i = 1, 2, \ldots, p$, are some continuously differentiable given functions; u are control parameters; $x(t_i^+)$ denotes the right limit of $x(t)$ at $t = t_i$.

On the solutions of boundary value problem (1)-(4) it is required to minimize the functional

$$J(u) = \Phi(x(0), x(T)), \tag{5}$$

where $\Phi(x, y)$ is a given scalar function with continuous first derivatives with respect to (x, y) .

Note that an optimal control problem with two-point boundary conditions under impulse actions was studied in [1].

At first, under some additional conditions on the impact data of the problem we prove that boundary value problem (1)-(3) has a unique solution for each fixed admissible control (4).

Theorem 1. *Let the above conditions be fulfilled and furthermore,* $\det\left(E + I_{ix}\left(x\left(t_i\right)\right)\right) \ne 0,\ i = 1, 2, ..., p.$

Then the functional (5) is differentiable under the constraints (1)-(4) and its gradient is of the form

$$J'(u) = f'_u(t, x, u)\psi(t) \in L_2^r[0, T]$$

where $\psi(t)$ is the solution of the difference-differential system

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = -f'_x(t, x, u)\psi(t) - m'(t)\lambda,\ t \ne t_i, \tag{6}$$

$$\psi(t_i^+) - \psi(t_i) =$$

$$= -I'_{ix}\left(x\left(t_i\right), v_i\right)\left(I'_{ix}\left(x\left(t_i\right), v_i\right) + E\right)^{-1}\psi\left(t_i\right), \quad i = 1, 2, ..., p, \tag{7}$$

with the boundary conditions

$$\psi(0) = A'\lambda + \frac{\partial\Phi}{\partial x(0)}, \ \psi(T) = -\frac{\partial\Phi}{\partial x(T)}.$$

Theorem 2. *Le the conditions of theorem 1 be fulfilled. Then for the optimality of the control $u_* \in U$ in problem (1)-(5) it is necessary that the inequality*

$$\int_0^T \langle H_u(t, x_*(t), u_*(t), \psi_*(t)), u(t) - u_*(t)\rangle \, dt \geq 0$$

to be fulfilled for any $u_* \in U$.

References

1. *Sharifov Ya.A.* Optimal control of impulsive systems with nonlocal boundary conditions // Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Mathematika). 2013. Vol. 57. No. 2. P. 65–72.

NECESSARY MINIMUM CONDITIONS IN CALCULUS OF VARIATIONS PROBLEMS IN THE PRESENCE OF VARIOUS DEGENERATIONS

M.J. Mardanov[1,2], T.K. Melikov[1,3], S.T. Malik[1,4]

[1]Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan

[2]Baku State University, Baku, Azerbaijan

[3]Institute of Control Systems of ANAS, Baku, Azerbaijan

[4]Baku Higher Oil School, Baku, Azerbaijan

misirmardanov@yahoo.com, t.melik@rambler.ru, saminmelik@gmail.com

We consider the following problem:

$$J\left(x\left(\cdot\right)\right) = \int_{t_0}^{t_1} L\left(t, x\left(t\right), \dot{x}\left(t\right)\right) dt \to \min_{x(\cdot)}, \tag{1}$$

$$x\left(t_0\right) = x_0, \ x\left(t_1\right) = x_1, \ x\left(\cdot\right) \in PC^1\left(I, R^n\right), \tag{2}$$

where R^n is n-dimensional Euclidean space, t_0, t_1, x_0, x_1 are the given points, $I := [t_0, t_1]$, while $L(t, x, \dot{x}) : I \times R^n \times R^n \to R$ is a given function, $PC^1(I, R^n)$ is the set of piecewise-smooth functions $x(t) : I \to R^n$.

We call the functions $x(\cdot) \in PC^1(I, R^n)$ satisfying the boundary condition (2), admissible functions. An admissible function that satisfies the Euler equation is called extremal. We study the problem (1),(2) in the case when along the extremal the Weierstrass condition and the Legendre condition degenerate at separate points or on some intervals. The method of the study is based on the introduction of Weierstrass type special variations [1, p.125], characterized by a number parameter. Two types of new necessary conditions are obtained: of equality type and of inequality type for strong and weak local minimum. It is shown on specific examples that these minimum conditions are not corollaries of necessary optimality conditions obtained in [2, p. 111, 179, 146] and have their own application area.

We give some theorems proved in this paper.

Theorem 1. *Let the functions $L(\cdot)$ and $L_{\dot{x}}(\cdot)$ be twice continuously differentiable in totality of variables and the admissible function $\bar{x}(\cdot)$ be an extremal of the problem (1), (2). Furthermore, let at the point $\theta \in (t_0, t_1)$ the function $\bar{x}(\cdot)$ be twice differentiable and along it for the vector $\eta \neq 0$ the Weierstrass and Legendre conditons degenerate at the poit θ, i.e. we have the equalities*

$$\mathscr{E}\left(\bar{L}\right)(\theta, \eta) = \eta^T \bar{L}_{\dot{x}\dot{x}}(\theta)\, \eta = 0. \tag{3}$$

Then: (i) if the extremal $\bar{x}(\cdot)$ is a strong local minimum in problem (1), (2), then the following equalities are fulfilled

$$\eta^T \left[L_x(\theta, \bar{x}(\theta), \dot{\bar{x}}(\theta) + \eta) - \bar{L}_x(\theta) - \bar{L}_{x\dot{x}}(\theta)\, \eta\right] = 0, \tag{4}$$

$$\bar{L}_{\dot{x}\dot{x}\dot{x}}(\theta)[\eta, \eta, \eta] = 0,$$

where $\mathscr{E}\left(\bar{L}\right)(t, \eta) = L(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t) + \eta) - \bar{L}(t) - \bar{L}_{\dot{x}}^T(t)\, \eta$ is a Weierstrass function [1, p.124], calculated along the extremal $\bar{x}(\cdot)$, where $\bar{L}(t) := L(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}})$, then the symbols $\bar{L}_x(\cdot), \bar{L}_{\dot{x}}(\cdot), \bar{L}_{x\dot{x}}(\cdot)$ and so on, are determined in a similar way;

(ii) if the extremal $\bar{x}(\cdot)$ is a weak local minimum in problem (1), (2), then there exists such a number $\delta > 0$, at which for each point $\eta \in B_\delta(0)$ satisfying condition (3), equalities (4) are valid, where the symbol $B_\delta(0)$ is a closed ball of radius δ centered at the point $0 \in R^n$.

Theorem 2. *Let the functions $L(\cdot)$ and $L_x(\cdot)$ be continuously differentiable in totality of variables and the admissible function $\bar{x}(\cdot)$ be an extremal of problem (1), (2), and along it for the vectors $\eta \neq 0$ and $\left(\bar{\lambda}-1\right)^{-1}\bar{\lambda}\eta$, where $\bar{\lambda} \in (0,1)$ the Weierstrass condition degenerate at any point t of the interval $(\bar{t}_0, \bar{t}_1) \subset [t_0, t_1]$, i.e. we have the equalities*

$$\mathscr{E}\left(\bar{L}\right)(t,\eta) = \mathscr{E}\left(\bar{L}\right)\left(t, \left(\bar{\lambda}-1\right)^{-1}\bar{\lambda}\eta\right) = 0. \tag{5}$$

Furthermore, let the extremal $\bar{x}(\cdot)$ be twice continuously differentiable on the interval $(\bar{t}_0, \bar{t}_1)$. Then: (i) if the extremal $\bar{x}(\cdot)$ is a strong local minimum in problem (1),(2), then the following inequality is fulfilled

$$\eta^T\left[\bar{\lambda}\bar{L}_{xx}(t,\eta) + \left(1-\bar{\lambda}\right)\bar{L}_{xx}\left(t,\left(\bar{\lambda}-1\right)^{-1}\bar{\lambda}\eta\right)\right]\eta - \frac{d}{dt}\Delta\bar{L}_x^T(t,\eta)\,\eta \geq 0, \quad \forall t \in (\bar{t}_0, \bar{t}_1)\,, \tag{6}$$

where $\bar{L}_{xx}(t,\xi) := L_{xx}(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t) + \xi)$, $\xi \in \left\{\eta, \left(\bar{\lambda}-1\right)^{-1}\bar{\lambda}\eta\right\}$,
$\Delta\bar{L}_x(t,\eta) : = L_x(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t) + \eta) - \bar{L}_x(t)$;

(ii) if the extremal $\bar{x}(\cdot)$ is a weak local minimum in problem (1),(2), then there exists such a number $\delta > 0$, at which for each point $\left(\eta, \left(\bar{\lambda}-1\right)^{-1}\bar{\lambda}\eta, \bar{\lambda}\right) \in \mathrm{B}_\delta(0) \times \mathrm{B}_\delta(0) \times (0{,}1)$ *satisfying condition (5), the inequality (6) is fulfilled.*

References

1. *Ioffe A.D., Tikhomirov V.M.* Theory of extremal problems. Moscow: Nauka, 1974.
2. *Gabasov R., Kirillova F.M.* Singular optimal controls. Plenum Press, 1978.

ADDITIONAL PAYMENT IN NON-ANTAGONISTIC DIFFERENTIAL GAME

E.Z. Mokhonko

Dorodnicyn Computing Center FRC CSC RAS, Moscow, Russia
ezmokhon@mail.ru

Introduction. Chernousko F.L., Melikjan A.A., Kononenko A.F., Mokhonko E.Z. [1] investigated how to receive the same result using the sample data information instead of the continuous reception of information.

In this paper some differential game is considered. The first player is able to pay additional payment to the second player, if the second player does not deviate from the agreed trajectory. The equilibrium situation is constructed in r-strategies with a possibility to pay an additional payment. r-strategies permit to receive information about position as sample data or in continuous way. The payment changes the character of information receipt about the trajectory. For example, it is getting possible to receive information about the equilibrium trajectory not countable times but the finite number times only.

The aim of the article is to clarify the character of changes of the information receipt about equilibrium trajectory under changes of additional payment.

1. Description of the differential game. Let us consider some differential non-antagonistic game of two players

$$\dot{x} = f(x, t, u, v), \quad t_0 \leq t \leq T, \quad x(t_0) = x^0, \quad u \in P, \quad v \in Q,$$

$$I_1(u, v) = g_1(x(T)), \qquad I_2(u, v) = g_2(x(T)) + U(x(T)).$$

Here x is n-dimensional vector of state, u and v are p- and q- dimensional vector-functions of control. Players 1 and 2 choose the meaning of the functions in order to maximize the appropriate cost functions $I_1(u, v) = g_1(x(T))$, $I_2(u, v) = g_2(x(T)) + U(x(T))$, g_1 and g_2 are continuous functions. The sets P and Q are compacts in the appropriate vector spaces. The vector-function $f(x, t, u, v)$ is a continuous function of all its arguments and satisfies restrictions which are imposed on it in [2]. We use the concepts of the Eiler's broken line and the motion [3].

$$U(x(T)) = \begin{cases} U_0 \geq 0, & x(T) = x^0, \\ 0, & x(T) \neq x^0. \end{cases}$$

If $U_0 > 0$, then $U(x(T))$ is the additional payment. The player 1 pays it to the second player if the trajectory of game is x^0 at the end of the game. If $U_0 = 0$, then the game without the additional payment is considered.

The set of permissible strategies of every player $\overline{U}, \overline{V}$ is the set of measurable for every argument positional $u(x, t), v(x, t)$ and program $u(t), v(t)$ controls. In addition to this some special strategies $\bar{u}, \bar{v}$ are permissible. They are called r- strategies [1]. r-strategies permit to receive information about position as sample data or in continuous way.

In this paper we consider the case $U_0(x^0(T)) > 0$, $x^0 = x^0(T)$, that is the game with the additional payment. The next theorem is proved.

Theorem 1. *The pair of r-strategies exists $\bar{u}^0(U_0), \bar{v}^0$ which forms the equilibrium situation and gives birth to the equilibrium trajectory $x^0(t)$.*

The number of the moments of the information receipt for the motion $x^0(t)$ is a finite number.

Let $U_{01}(x^0(T)) > U_{02}(x^0(T)) > 0$. The pair $\bar{u}^0(U_{01}), \bar{v}^0$ forms the equilibrium situation and gives birth to the equilibrium trajectory $x^0(t)$ as well as the pair $\bar{u}^0(U_{02}), \bar{v}^0$.

Theorem 2. *Let the pair $\bar{u}^0(U_{01}), \bar{v}^0$ gives birth to the motion $x^0(t)$. The amount of the moments of the information receipt by the player 1 about the motion $x^0(t)$ is not more than the amount of the moments of information receipt for the same motion $x^0(t)$ which is born by the pair $\bar{u}^0(U_{02}), \bar{v}^0$.*

References

1. *Kononenko A.F., Mokhonko E.Z.* Processes of information reception in nonantagonistic differential game. Reports on applied mathematics. M: CC AS USSR, 1982, 20 p.
2. *Kononenko A.F.* Structure of optimum strategies in dynamical control systems // J. Comput. Math. and Math. Phys. 1980. Vol. 20. No 5. P. 1105–1116.
3. *Krasovsky N.N., Subbotin A.N.* Positional differential games. Moscow: Nauka, 1974. 456 p.

VARIATIONAL ANALYSIS IN NONSMOOTH NUMERICAL OPTIMIZATION

B. Mordukhovich

Wayne State University, USA

aa1086@wayne.edu

In this lecture we discuss recent applications of advanced variational analysis and generalized differentiation to the design, justification of numerical algorithms of nonsmooth optimization with applications to practical modeling. Our main attention is paid to developing generalized Newton-type algorithms to solve nonsmooth optimization problems and subgradient systems that are based mainly on constructions and results of second-order variational analysis. Solvability of these algorithms is proved in rather broad settings, and then verifiable conditions for their local and global superlinear convergence are obtained. We consider in more detail problems convex composite optimization for which a generalized damped Newton algorithm exhibiting global superlinear convergence is designed. The efficiency of the designed algorithm is demonstrated by solving a class of Lasso problems that are well-recognized in applications to machine learning and statistics. For this class of nonsmooth optimization problems, we conduct numerical experiments and compare the obtained results with those achieved by using other first-order and second-order methods.

This talk is based on recent joint works with P. D. Khanh (HCMUE, Vietnam), V. T. Phat (WSU), M. E. Sarabi (Miami Univ., USA), and D. B. Tran (WSU).

ON DECOUPLING TRANSFORMATION FOR THREE TIME-SCALE LINEAR TIME-INVARIANT SINGULARLY PERTURBED CONTROL SYSTEMS WITH STATE DELAYS

C.A. Naligama, O.B. Tsekhan

Yanka Kupala State University of Grodno, Grodno, Belarus
naligama_ch_19@student.grsu.by, tsekhan@grsu.by

Consider the three time-scale singularly perturbed linear time-invariant control system with state delays (TSPLTISD):

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=0}^{l} A_{11j}x(t-jh) + A_{12}y(t) + A_{13}z(t) + B_1u(t),\ x \in R^{n_1}, u \in R^r,$$
$$\varepsilon_1\dot{y}(t) = \sum_{j=0}^{l} A_{21j}x(t-jh) + A_{22}y(t) + A_{23}z(t) + B_2u(t),\ y \in R^{n_2},$$
$$\varepsilon_2\dot{z}(t) = \sum_{j=0}^{l} A_{31j}x(t-jh) + A_{32}y(t) + A_{33}z(t) + B_3u(t),\ z \in R^{n_3}, t \geq 0,$$

where A_{i1j}, A_{i2}, A_{i3}, B_i, $i = \overline{1,3}$, $j = \overline{0,l}$ are constant matrices with appropriate dimensions, $h = const > 0$ is a delay, $0 < \varepsilon_2 \ll \varepsilon_1 \ll \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \ll 1$ are the small parameters, that describe the time-scale separation, $u(t)$ ia a piecewise continuous on T r-vector control function. Let $p \triangleq \frac{d}{dt}$ be the differentiation operator, e^{-ph} the delay operator: $e^{-ph}v(t) = v(t-h)$. Similar to [1],[2] a generalization of Chang's non-degenerate decoupling transformation [3], under change of variables $T(\varepsilon_1, \mu, e^{-ph})$,

$\mu = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$, is constructed. It leads to solving of six matrix operator algebraic equations.

Under *Assumptions* $\det A_{33} \neq 0$, $\det\left[A_{22} - A_{23}A_{33}^{-1}A_{32}\right] \neq 0$ for all sufficiently small values of singularity parameters $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ there are unique continuous matrix operators $L_i\left(\varepsilon_1, \varepsilon_2, e^{-ph}\right), H_i\left(\varepsilon_1, \varepsilon_2, e^{-ph}\right), i = \overline{1,3}$, satisfying the abovemantioned matrix equations, and these matrix operators could be represented in asymptotic series form.

It is proved that the decoupling transformation can be constructed with any degree of accuracy in the form of asymptotic expansions in the powers of small parameters. Iterative schemes with appropriate initial conditions for finding the terms of the asymptotic series are indicated.

Theorem 1. *If the Assumptions are valid, then there are* $\varepsilon_1{}^*, \varepsilon_2{}^* \geq 0$ *such that for all* $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_1^*]$, $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_2^*]$ *as a result of the transformation* $T\left(\varepsilon_1, \mu, e^{-ph}\right)$*, the TSPLTISD is transformed into an equivalent system with separated motions*

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}(t) &= A_\xi\left(\varepsilon_1, \mu, e^{-ph}\right)\xi(t) + B_\xi\left(\varepsilon_1, \mu, e^{-ph}\right)u(t),\\
\varepsilon_1\dot{\eta}(t) &= A_\eta\left(\varepsilon_1, \mu, e^{-ph}\right)\eta(t) + B_\eta\left(\varepsilon_1, \mu, e^{-ph}\right)u(t),\\
\varepsilon_2\dot{\beta}(t) &= A_\beta\left(\varepsilon_1, \mu, e^{-ph}\right)\eta(t) + B_\beta\left(\varepsilon_1, \mu, e^{-ph}\right)u(t),
\end{aligned} \tag{1}$$

where $A_\xi\left(\varepsilon_1, \mu, e^{-ph}\right), B_\xi\left(\varepsilon_1, \mu, e^{-ph}\right),\ A_\eta\left(\varepsilon_1, \mu, e^{-ph}\right), B_\eta\left(\varepsilon_1, \mu, e^{-ph}\right)$, $A_\beta\left(\varepsilon_1, \mu, e^{-ph}\right), B_\beta\left(\varepsilon_1, \mu, e^{-ph}\right)$ *are defined by TSPLTISD system matrises and matrix operators* $L_i\left(\varepsilon_1, \varepsilon_2, e^{-ph}\right), H_i\left(\varepsilon_1, \varepsilon_2, e^{-ph}\right), i = \overline{1,3}$.

Theorem 2. *Let the Assumptions be satisfied. For sufficiently small* $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ *the decoupled system (1) is asymptotically approximated for any* M, $M = 0, 1, 2, \ldots$ *, by the system*

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}(t) &= \left[\sum_{n=0}^{N}\varepsilon_1^n\sum_{m=0}^{M}\mu^m A_\xi^{nm}\left(e^{-ph}\right) + O(\mu^{M+1})\right]\xi(t)\\
&\qquad + \left[\sum_{n=0}^{N}\varepsilon_1^n\sum_{m=0}^{M}\mu^m B_\xi^{nm}\left(e^{-ph}\right) + O(\mu^{M+1})\right]u(t),\\
\varepsilon_1\dot{\eta}(t) &= \left[\sum_{n=0}^{N}\varepsilon_1^n\sum_{m=0}^{M}\mu^m A_\eta^{nm}\left(e^{-ph}\right) + O(\mu^{M+1})\right]\eta(t)\\
&\qquad + \left[\sum_{n=0}^{N}\varepsilon_1^n\sum_{m=0}^{M}\mu^m B_\eta^{nm}\left(e^{-ph}\right) + O(\mu^{M+1})\right]u(t),\\
\varepsilon_2\dot{\beta}(t) &= \left[\sum_{n=0}^{N}\varepsilon_1^n\sum_{m=0}^{M}\mu^m A_\beta^{nm}\left(e^{-ph}\right) + O(\mu^{M+1})\right]\beta(t)\\
&\qquad + \left[\sum_{n=0}^{N}\varepsilon_1^n\sum_{m=0}^{M}\mu^m B_\beta^{nm}\left(e^{-ph}\right) + O(\mu^{M+1})\right]u(t),
\end{aligned} \tag{2}$$

where the matrix operator parameters are calculated iteratively.

Corollary 1. *Let the Assumptions be satisfied. For sufficiently small* $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$*, the decoupled system (1) is* $O(\mu)$*-close to degenerate (reduced),* ε_2*- and* ε_1*-boundary-layer systems [1] for the TSPLTISD.*

Acknowledgement The work of Tsekhan O.B. was partially supported under the state research program "Convergence-2025" of Republic of Belarus: Task 1.2.04.4.

References

1. *Ladde G.S., Rajalakshmi S.G.* Diagonalization and stability of multi-time-scale singularly perturbed linear systems // Applied Mathematics and Computation. 1985. Vol. 16. Issue 2. P. 115–140. DOI:10.1016/0096-3003(85)90003-7.
2. *Tsekhan, O.B.* Complete controllability conditions for linear singularly perturbed time-invariant systems with multiple delays via Chang-type transformation // Axioms. 2019. Vol. 8. No. 71. P. 1–19. DOI: 10.3390/axioms8020071.
3. *Chang, K.* Singular perturbations of a general boundary value problem // SIAM J. Math. Anal. 1972. No. 3. P. 520–526.

OPTIMAL MOTION PLANNING IN CLUTTERED ENVIRONMENT

S. Olaru, D. Ioan

University Paris-Saclay, CNRS, CentraleSupélec,

Laboratoire des Signaux et Systémes (L2S), Gif-sur-Yvette, France

{sorin.olaru, daniel.ioan}@l2s.centralesupelec.fr

1. Introduction. In both control and robotics communities the interest in the navigation through multi-obstacle environments is constantly growing due to its vast domain of applications, e.g., [1]. From a mathematical point of view, the main difficulty arises from the nonconvexity of the feasible regions in the motion space and consequently in the lack of connectivity in the solution space.

Our solution exploits the *convex lifting* notion, which has been previously employed in constrained control and PWA (piecewise affine) control implementations [2]. Our work establish a link between the convex lifting involving the obstacles, the polyhedral partitions and the path selection in the navigation space. The technique can be understood as a convexification procedure for the characterization of the non-convex motion space.

The effective motion planning strategy is divided into two stages. Basically, in a first stage we neglect the dynamical constraints and the physical limitations that may appear in the motion planning in order to generate a feasible geometric path. As stated, the resulting path ensures the avoidance of obstacles and has the potential to explicitly describe a feasible corridor. At a second stage, using the geometric path and the corridor as starting points, we find some appropriate trajectory respecting the agent's dynamics and constraints using a MPC strategy.

2. Contribution

Definition 1. *Given a collection of obstacles* $\mathbb{P} = \bigcup_{j=1}^{N_o} P_j$ *with* $P_i \cap P_j = \emptyset, \forall i \neq j$, *and a partition of the environment* $\mathbb{X} \supset \mathbb{P}$ *induced by* $\mathbb{P}$, *the function* $z : \mathbb{X} \to \Re$ *is called a* PWA (piecewise affine) lifting of the cluttered environment *if there exists* $z(x) = a_i^\top x + b_i$, $x \in X_i$ *with* X_i *satisfying* $int(X_i) \supset P_i$, $\forall i$, $a_i \in Red$ *and* $b_i \in \Re$.

Theorem 1. *A piecewise affine lifting for a collection of obstacles* $\mathbb{P} = \bigcup_{j=1}^{N_o} P_j$ *with* $int(P_i \cap P_j) = \emptyset, \forall i \neq j$ *is continuous and convex if* (a_i, b_i) *satisfy: The values* $\epsilon, M > 0$ *are suitably chosen and* $\mathcal{V}(P_i)$ *denotes the collection of extreme points of* P_i.

Using Theorem 1, we are able to obtain a polyhedral partition of the navigation space w.r.t. the obstacle setting. Further, we define a graph, considering the vertices of the partition cells as nodes in that graph and the facets as edges. Applying a graph search algorithm, we can derive the shortest geometric path between any two points in the space. This path is a foundation for a corridor-constrained MPC strategy, as depicted in Figure 1.

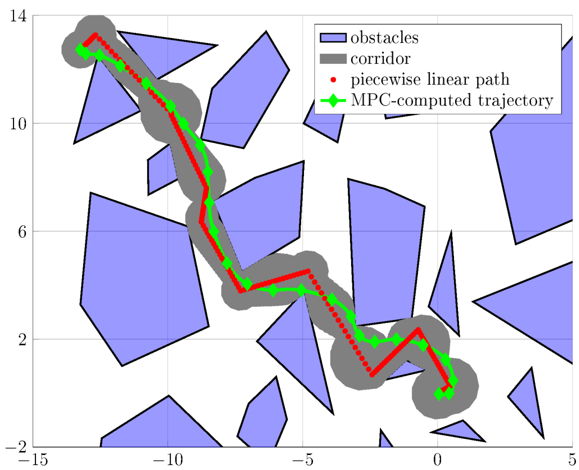


Figure 1 — The shortest path Path(x_i, x_f) and a feasible trajectory within the corridor.

3. Conclusions We propose a constructive solution for the generation of collision-free trajectories between two points in an environment containing multiple obstacles in a d-dimensional space. This builds on the geometry of the obstacles and the convex lifting procedure describing a graph around the obstacles. This graph represents a key element in order to generate collision-free trajectories employing MPC controllers with recursive feasibility guarantees and convergence in between an initial and a final position.

References

1. *Jawad H. M., Nordin R., Gharghan S. K., Jawad A. M., Ismail M.* Energy-efficient wireless sensor networks for precision agriculture: A review // Sensors. 2017. Vol. 17. No. 8. P. 1781.
2. *Nguyen N. A., Gulan M., Olaru S., Rodriguez-Ayerbe P.* Convex lifting: Theory and control applications // IEEE Transactions on Automatic Control. 2017. Vol. 63. No. 5. P. 1243–1258.

ADAPTIVE SENSORLESS INDUCTION MOTOR CONTROL SYNTHESIS WITH QUADRATIC COST CRITERIA

O.F. Opeiko

Belarusian National Technical University, Minsk, Belarus
oopeiko@bntu.by

The sensorless (without speed sensor) induction motor vector control synthesis is an actual problem [1] for industrial applications. This paper proposes a modified cost criterion which improve the speed computation, based on model reference adaptive control (MRAC).

In the stationary frame (a, b) the induction motor with the state vector $x = (\Psi_a, \Psi_b, i_a, i_b)^T$ and the control vector (u_a, u_b) is described by the equations

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}_a &= -\alpha\Psi_a - \bar{\omega}\Psi_b + \alpha L_1 2 i_a, \\ \dot{\Psi}_b &= -\alpha\Psi_b + \bar{\omega}\Psi_a + \alpha L_1 2 i_b, \\ \frac{di_a}{dt} &= -R_1 K_4 i_a + K_4 u_a - k_2 K_4 \dot{\Psi}_a, \\ \frac{di_b}{dt} &= -R_1 K_4 i_b + K_4 u_b - k_2 K_4 \dot{\Psi}_b, \\ y &= i_{ab}. \end{aligned} \tag{1}$$

The electromagnetic torque depends on the current vector (i_a, i_b) and the flux vector as follows:

$$M = k_M(\Psi_a i_b - \Psi_b i_a). \tag{2}$$

There are the unknown, not measured speed $\bar{\omega}$ and the flux vector $[\Psi_a, \Psi_b]$ to be computed from the system's measurable output $y = i_{ab} = (i_a, i_b)$. So, the induction motor equations (1), (2) can be considered as a model for the speed and flux computing. Let $\hat{y} = \hat{i}_{ab} = (\hat{i}_a, \hat{i}_b)$ be the model output, then $e = (\hat{i}_{ab}) - y$ is the system tracking error. All the variables from the model are marked with $(\wedge)$.

The conventional gradient method [2] is based on form $V = x^T \Lambda x$, minimization, with the state vector error x. However, this approach has some disadvantages, if the flux vector is not measurable. The improved criterion to minimize is as follows

$$V = (\hat{i}_a - i_a)^2 + \hat{i}_b - i_b)^2 + \lambda(\hat{M} - M)^2, \tag{3}$$

where $(\hat{M} - M)^2$ contributes to the flux and current oscillation reduction. The Lyapunov function V derivative takes a form

$$\dot{V} = 2(\hat{i}_a - i_a)\frac{d(\hat{i}_a - i_a)}{dt} + 2(\hat{i}_b - i_b)\frac{d(\hat{i}_b - i_b)}{dt} + 2\lambda(\hat{M} - M)(\dot{\hat{M}} - \dot{M}). \tag{4}$$

Therefore, its gradient is determined by the expression

$$\nabla_{\hat{\bar{\omega}}}\dot{V} = 2(\hat{i}_a - i_a)\frac{\partial}{\partial\hat{\bar{\omega}}}\frac{d\hat{i}_a}{dt} + 2(\hat{i}_b - i_b)\frac{\partial}{\partial\hat{\bar{\omega}}}\frac{d\hat{i}_b}{dt} + 2\lambda(\hat{M} - M)\frac{\partial\dot{\hat{M}}}{\partial\hat{\bar{\omega}}}. \tag{5}$$

In order to make the Lyapunov function (3) decreasing, the estimated speed must satisfy the resulting equation

$$\dot{\hat{\bar{\omega}}} = -\Gamma\nabla_{\hat{\bar{\omega}}}\dot{V}.$$

The expression (5) must realize the adaptation such as the model dynamics becomes similar to the induction motor dynamics. In equation (5) Γ is a positive constant.

The sensorless model reference adaptive vector control simulation is executed for 2.2 KW induction motor. The simulation demonstrates the successful speed estimation with (3)-(5).

References

1. *Salim R.,Mansouri, A., Bendiabdellah A., Chekroun S., Touam M.* Sensorless passivity based control for induction motor via an adaptive observer // ISA Transactions 84. 2019. P. 118–127.
2. *Fradkov A.L.* Adaptivnoe upravlenie v slojnyh sistemah. (Adaptive control in the complicated systems). Moscow: Nauka, 1990 (in Russian).

INPUT RECONSTRUCTION PROBLEM UNDER THE LACK OF INFORMATION IN A QUASI-LINEAR STOCHASTIC EQUATION

V.L. Rozenberg

Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the RAS, Yekaterinburg, Russia

rozen@imm.uran.ru

1. Problem Statement. The problem of reconstructing unknown inputs in a quasi-linear stochastic differential equation (SDE) is investigated on the basis of the approach of the theory of dynamic inversion suggested in the works by Kryazhimskii, Osipov, and their colleagues, see [1] and its bibliography. We consider the statement when the simultaneous reconstruction of disturbances in the deterministic and stochastic terms of the equation is performed with the use of discrete incomplete information on a number of realizations of the stochastic process. The work actually continues studies [2], where a similar problem was solved for a linear SDE via a partially observed system of linear ordinary differential equations (ODEs) obtained by the method of moments.

A SDE with diffusion depending on the phase state is of the form

$$dx(t,\omega) = (A(t)x(t,\omega) + B(t)u_1(t) + f(t))\,dt + U_2(t)\,x(t,\omega)\,d\xi(t,\omega). \quad (1)$$

Here, $t \in T = [0, \vartheta]$, $x \in \mathbb{R}^n$, $x(0,\omega) = x_0$ is a known deterministic or random (normally distributed) vector; $\omega \in \Omega$, (Ω, F, P) is a probability space, $\xi(t,\omega) \in \mathbb{R}$ is a standard scalar Wiener process; $A(t)$, $B(t)$, and $f(t)$ are continuous matrix functions of dimension $n \times n$, $n \times r$, and $n \times 1$, respectively. Two external disturbances act on the system: vectors $u_1(t) \in \mathbb{R}^r$ and $u_2(t) \in \mathbb{R}^n$ (the main diagonal of a diagonal matrix $U_2(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$) with values from given convex compact sets; both functions are of bounded variation. The input u_1 enters into the deterministic term and influences the mathematical expectation of the desired process, whereas the vector u_2 regulates the amplitude of random noises.

A solution of equation (1) is defined as a stochastic process satisfying corresponding integral identity containing the Ito integral for any t with probability 1. Under the assumptions above, there exists a unique solution, which is a normal Markov process with continuous realizations.

The problem under discussion is as follows. At discrete, frequent enough, times $\tau_i \in T$, $\tau_i = i\delta$, $\delta = \vartheta/l$, $i \in [0 : l]$, the information on some number N of realizations of the stochastic process $x(\tau_i)$ is received, at that only q ($q \le n$) first coordinates are measurable. It is required to design an algorithm for the dynamical reconstruction of unknown disturbances $u_1(t)$ and $u_2(t)$ generating $x(t)$ from the information above. The probability of an arbitrarily small deviation of approximations from the desired inputs in L_2-metric should be close to 1 for sufficiently large N and the time discretization step $\delta = \delta(N) = \vartheta/l(N)$ concordant with N in an appropriate way.

2. Outline of Solving Algorithm. The specific properties of SDE (1) admit the reduction of the problem to an inverse problem for a nonlinear system of ODEs describing the mathematical expectation and covariance matrix of the desired process. To solve the latter problem, a finite-step ($l(N)$ identical steps) solving algorithm based on the method of auxiliary controlled models [1] is designed. In connection with the lack of incoming information, Block 1 for the dynamical reconstruction of unmeasured coordinates is introduced to get the information on the whole phase state. This information is fed to Block 2 forming (by the feedback law) model controls to approximate real disturbances synchronously with the process. We denote the output of the algorithm by $(u_1^N(\cdot), u_2^N(\cdot))$ emphasizing the dependence of all its parameters on the number N of available trajectories of (1). In the report, we discuss different variants for additional assumptions on the structure of equation (1), on its solutions and measurements, which are sufficient to prove

Theorem 1. *The accuracy of the algorithm is estimated as*

$$P\left(\max_{i=1,2;\, n_1=r,\, n_2=n}\{\, \|u_i^N(\cdot) - u_i(\cdot)\|_{L_2(T;\mathbb{R}^{n_i})}\} \le h(N)\right) = 1 - g(N), \quad (2)$$

where $h(N)$, $g(N) \to 0$ *as* $N \to \infty$ *and can be written explicitly.*

The algorithm, the choice of its parameters, and the character of convergence in estimate (2) are illustrated by a model example.

The work was performed as part of research conducted in the Ural Mathematical Center with the financial support of the Ministry of Education and Science of the RF (Agreement number 075-02-2021-1383).

References

1. *Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V., Maksimov V.I.* Dynamic Recovery Methods for Inputs of Control Systems. Yekaterinburg: UrO RAN, 2011 (in Russian).
2. *Rozenberg V.L.* Reconstruction of random-disturbance amplitude in linear stochastic equations from measurements of some of the coordinates // Comput. Math. Math. Phys. 2016. Vol. 56. No. 3. P. 367–375.

EXACT PENALTY OF HIGH ORDER FOR EXTREME PROBLEMS OF DIFFERENTIAL INCLUSIONS

M.A. Sadygov

Baku State University, Baku, Azerbaijan
misreddin08@rambler.ru

In this paper, using theorems on the continuous dependence of the solution of differential inclusions on the perturbation, we obtain high-order exact penalty theorems for nonconvex extremal problems of differential inclusions in the space of Banach-valued absolutely continuous functions.

Let X be separable Banach space, $a : [0,T] \times X \to comp\, X \bigcup \{\emptyset\}$, $T > 0$, $R_\infty = (-\infty, +\infty]$, $f : [0,T] \times X \times X \to R_\infty$ normal integrant, $\varphi : X \times X \to R_\infty$ function, $M \subset X$ nonempty compact set, $1 \leq p < +\infty$.

The symbol $W_p^1([0,T], X)$ denotes Banach space of absolutely continuous functions from $[0,T]$ in X with the first derivative according to Freshet which belongs $L_p([0,T], X)$ with the norm $\|x(\cdot)\|_{W_p^1} = \|x(0)\| + \left(\int_0^T \|\dot{x}(t)\|^p dt\right)^{1/p}$.

A solution $\bar{x}(\cdot) \in W_p^1([0,T], X)$ of the system

$$\dot{x}(t) \in a(t, x(t)), \quad x(0) \in M, \tag{1}$$

minimizing functional

$$J(x) = \varphi(x(0), x(T)) + \int\limits_0^T f(t, x(t), \dot{x}(t))dt \tag{2}$$

among all solutions of (1) in $W_p^1([0,T], X)$ will be called the solution of problems (1), (2) in $W_p^1([0,T], X)$. Let's assume that $|J(\bar{x})| < +\infty$.

Let's set $\psi(s,x,y) = \inf\{\|z-y\| : z \in a(s,x)\}$, $q(x) = \inf\limits_{y\in M} \|y-x\|$, where $\inf \emptyset = +\infty$, $B(\bar{x}(t),\alpha) = \{x \in X : \|x - \bar{x}(t)\| \le \alpha\}$, where $t \in [t_0, T]$, $\alpha > 0$ and (see [1])

$$J_r(x) = \varphi(x(0), x(T)) + \int_0^T f(t, x(t), \dot{x}(t))dt+$$

$$+r\Bigg(\big[q(x(0)) + (\int_0^T \psi^\beta(t, x(t),\, \dot{x}(t))dt)^{\frac{1}{\beta}}\big]^\beta +$$

$$+ \|x(\cdot) - \bar{x}(\cdot)\|_{W_\beta^1}^{\beta-\nu} \big[q(x(0)) + (\int_0^T \psi^\beta(t, x(t),\, \dot{x}(t))dt)^{\frac{1}{\beta}}\big]^\nu \Bigg),$$

where $x(\cdot) \in W_\beta^1([0,T], X)$, $\beta \ge \nu > 0$, $\beta \ge 1$.

Let $\gamma > e^{m(T)}(2 + m(T))^2$, $m(t) = \int\limits_0^t k(s)ds$, $h = \max\{1,\, T^{\frac{\beta-1}{\beta}}\}$.

Theorem 1. *Let $a : [0,T] \times X \to comp\, X \bigcup \{\emptyset\}$ be a multiple-valued map, $a(t,x)$ in the domain $t \in [0,T]$, $x \in B(\bar{x}(t),\alpha)$ the nonempty compact set and is measurable on t, $M \subset X$ nonempty compact set, $f : [0,T] \times X \times X \to R_\infty$ normal integrant, $\varphi : X \times X \to R_\infty$ function, $\beta \ge \nu > 0$, $\beta \ge 1$, there exist function $k(\cdot) \in L_\beta[0,T]$ and numbers $k_1 > 0$ and $k_2 > 0$ such that $\rho_X(a(t,x), a(t,y)) \le k(t)\,\|x-y\|$ at $x, y \in B(\bar{x}(t),\alpha)$ and*

$$|f(t,x_1,z_1) - f(t,x_2,z_2)| \le k_1(\|x_1 - x_2\| + \|z_1 - z_2\|)^\nu((\|x_2 - \bar{x}(t)\| +$$
$$+ \|z_2 - \dot{\bar{x}}(t)\|)^{\beta-\nu} + (\|x_1 - x_2\| + \|z_1 - z_2\|)^{\beta-\nu})$$

at $x_1,\ x_2 \in B(\bar{x}(t),\alpha)$, $z_1,\ z_2 \in X$,

$$|\varphi(u_1,\upsilon_1) - \varphi(u_2,\upsilon_2)| \le k_2(\|u_1 - u_2\| + \|\upsilon_1 - \upsilon_2\|)^\nu((\|u_2 - \bar{x}(0)\| +$$
$$+ \|\upsilon_2 - \bar{x}(T)\|)^{\beta-\nu} + (\|u_1 - u_2\| + \|\upsilon_1 - \upsilon_2\|)^{\beta-\nu})$$

at $u_1, u_2 \in B(\bar{x}(0),\alpha)$, $\upsilon_1, \upsilon_2 \in B(\bar{x}(T),\alpha)$ and $\bar{x}(\cdot) \in W_\beta^1([0,T],X)$ is the solution of the problems (1),(2) in $W_\beta^1([0,T],X)$. Then there exists $r_0 > 0$ such that $\bar{x}(t)$ are minimized by functional $J_r(x)$ at $r \ge r_0$ in $D_\beta = \{x(\cdot) \in W_\beta^1([0,T],X) : \|x(\cdot) - \bar{x}(\cdot)\|_{W_\beta^1} \le \frac{\alpha}{\gamma h}\}$.

References

1. *Sadygov M.A.* On the exact penalty of high order for extreme problems of differential inclusions// Chronos: Multidisciplinary Sciences. 2021. Vol.6, No. 2. P. 75–86.

NUMERICAL METHODS FOR NONCONVEX OPTIMAL CONTROL PROBLEMS

A.S. Strekalovsky

Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS,
Irkutsk, Russia
strekal@icc.ru

Let us address the following state-linear control system

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(u(t),t) \quad \overset{\circ}{\forall} t \in T :=]t_0, t_1[, \ x(t_0) = x_0; \tag{1}$$

$$u(\cdot) \in \mathcal{U} := \{u(\cdot) \in L^r_\infty(T) \mid u(t) \in U \quad \overset{\circ}{\forall} t \in T\}. \tag{2}$$

under standard assumptions ensuring the existence of the unique absolutely continuous solution $x(\cdot,u) \in AC_n(T),\ x(t) = x(t,u),\ t \in \overline{T}$ of the ODEs system (1) for any feasible control $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ [1–5]. In addition, consider the functionals

$$J_i(x,u) = \varphi_{1i}(x(t_1)) + \int\limits_T \varphi_i(x(t),u(t),t)dt,\ i \in \{0\} \cup I,\ I = \{1,\dots,m\}, \tag{3}$$

where $\varphi_{1i}(x) := g_{1i}(x) - h_{1i}(x) \quad \forall x \in \Omega_1 \subset I\!R^n$, $\varphi_i(x,u,t) := g_i(x,u,t) - h_i(x,t),\ i \in \{0\} \cup I$, with the state-convex functions $g_{1i}(x),\ h_{1i}(x)$, and $x \to g_i(x,u,t)$, $x \to\ h_i(x,t) \quad \forall (u,t) \in U \times T$.

We address now the following optimal control (OC) problem

$$(\mathcal{P}): \qquad \left.\begin{array}{l} J_0(u) := J_0(x(\cdot,u),u(\cdot)) \downarrow \min\limits_u,\ u(\cdot) \in \mathcal{U}, \\ J_i(u) := J_i(x(\cdot,u),u(\cdot)) \le 0,\ i \in I. \end{array}\right\} \tag{4}$$

It is clear that this OC problem is nonconvex due to nonconvexity of the data, which implies that in $(\mathcal{P})$ there might exist a big number of locally optimal and stationary (say, in the sense of PMP) processes that may be rather far from the set $Sol(\mathcal{P})$ of global solutions of $(\mathcal{P})$.

Further, we employ the penalty function $\pi(x,u) := \pi(u) := \max\{0, J_1(u), \dots, J_m(u)\}$ and address the auxiliary (penalized) problem

$$(\mathcal{P}_\sigma): \qquad J_\sigma(u) := J_\sigma(x(\cdot,u),u(\cdot)) \downarrow \min_u,\ u(\cdot) \in \mathcal{U}, \tag{5}$$

with the cost (merit) function as follows $J_\sigma(u) := J_0(x(\cdot,u),u(\cdot)) + {}+\sigma\pi(x(\cdot,u),u(\cdot))$, where $\sigma \ge 0$ is a penalty parameter. Recall that the key feature of the Exact Penalization Theory consists in the existence of threshold value $\sigma_* > 0$ of the penalty parameter for which Problems $(\mathcal{P})$ and $(\mathcal{P}_\sigma)$ are equivalent in the sense that $\mathcal{V}(\mathcal{P}) = = \mathcal{V}(\mathcal{P}_\sigma)$ and $Sol(\mathcal{P}) = Sol(\mathcal{P}_\sigma) \quad \forall \sigma > \sigma_*$.

Furthermore, on account of the obvious presentation $J_i(u) = G_i(x, u) - F_i(x),\ i \in \{0\} \cup I$, with the state-convex $G_i(\cdot)$ and $F_i(\cdot)$, one can decompose the merit function $J_\sigma(x, u)$ as follows [6] $J_\sigma(x, u) := G_\sigma(x, u) - F_\sigma(x)$, where $G_\sigma(x, u)$ and $F_\sigma(x)$ are state-convex.

Using this decomposition, we can address the (partially) linearized (at $y(\cdot) \in AC_n(T)$) OC problem [6]

$$(\mathcal{P}_\sigma L(y)) \colon \quad \Phi_{\sigma y}(u) := G_\sigma(x(\cdot), u(\cdot)) - \\ - \langle\langle \nabla F_\sigma(y(\cdot)), x(\cdot)\rangle\rangle \downarrow \min_u,\ u(\cdot) \in \mathcal{U}, \quad (6)$$

with the help of which we can formulate the so-called Global Optimality Conditions for Problem $(\mathcal{P}_\sigma)$.

In addition, we developed a Scheme of Local and Global Searches for the nonconvex OC Problem $(\mathcal{P}_\sigma)$. Combining these procedures with the corresponding updates of the penalty parameter $\sigma_k > 0$, we developed Numerical Methods for the nonconvex Problem $(\mathcal{P})$ that allows us not only to escape local pitfalls of $(\mathcal{P})$, but to reach the globally optimal controls in nonconvex OC problems of the kind.

This research was funded by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation within the framework of the project "Theoretical foundations, methods and high-performance algorithms for continuous and discrete optimization to support interdisciplinary research" (State Registration No. 121041300065-9)

References

1. *Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F.* The mathematical theory of optimal processes. New York: Interscience, 1976.
2. *Gabasov R., Kirillova F.M.* Optimization of linear systems. Plenum P.C., 1979.
3. *Gabasov R., Kirillova F.M.* Maximum's principle in the optimal control theory. Minsk: Nauka i Technika, 1974 (in Russian).
4. *Chernousko F.L., Ananievski I.M., Reshmin S.A.* Control of nonlinear dynamical systems: methods and applications. Berlin: Springer, 2008.
5. *Kurzhanski A.B., Varaiya P.* Dynamics and control of trajectory tubes: theory and computation. Boston: Birkhauser, 2014.
6. *Strekalovsky A.S., Yanulevich M.V.* On global search in nonconvex optimal control problems // J. Global Optim. 2016. Vol. 65. No. 1. P. 119–135.

ACTIVE CONTROL OF AN IMPROVED BOUSSINESQ SYSTEM

K. Yildirim

Mus Alparslan University, Mus, Turkey
k.yildirim@alparslan.edu.tr

Introduction. In this study, optimal control of excessive water waves in a canal system, modeled by a nonlinear improved Boussinesq equation, is considered. Suppressing of the waves in the canal system is successfully obtained by means of optimally determining of canal depth control function via Pontryagin's maximum principle, which transforms to optimal control problem to solving an initial-boundary-terminal value problem. In order to show effectiveness and robustness of the control actuation, a numerical example is given in the table form.

1. Mathematical Formulation of the Control Problem. Consider two lakes/two separate seas in a region. Due to several reasons, designers need to open a canal between two lakes/two separate seas. As estimated, this canal will have the some effects, simply, such as economically due to digging cost and physically due to excessive waves. Canal system, in Fig. 1, is fully filled with water and subject to wind as an external excitation. In order to prevent excessive water waves and unnecessary cost, we need to optimally determine the depth of the canal. The main aim of the present control problem is to damp out the excessive water waves via optimal control of the canal depth.

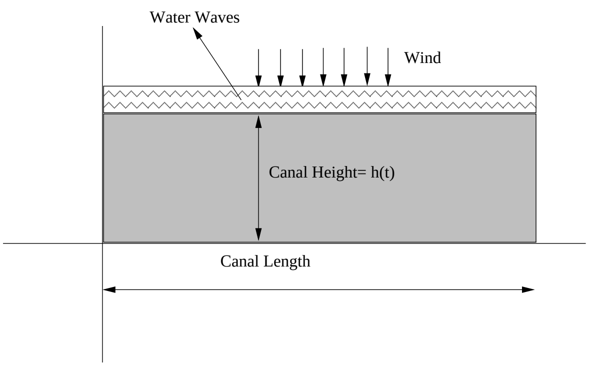


Figure 1 — A Canal System

Consider the system of equation in general form as follows [1, 2]

$$u_{tt} + \alpha(u_{ttxx} - u_{ttxxxx}) + \beta u_{txx} + \gamma u_{xxxx} + u_{xx} + [\mathcal{N}(u)]_{xx} = \\ = f(t,x) + \mathcal{H}(t,x), \qquad (1)$$

where state variable u is the elevation of the free surface of water at $(t, x) \in \Omega = \{t \in (0, tf), x \in (0, \ell)\}$, t is time variable, t_f is predetermined terminal time, x is space variable, ℓ is the length of the canal, α is a constant in $\mathcal{R}^+$, $\beta > 0$ is an internal damping constant, $\gamma > 0$ is a constant depending on the depth of water, $\mathcal{N}$ is a nonlinear function of u, f is an external excitation function, $\mathcal{H}(t, x) = \hbar(t)\theta(x)$ in which $\hbar(t)$ is the optimal canal depth control function and $\theta(x)$ is a function, affecting on canal depth function. Equation (1) is subject to the following boundary conditions $u(t, x) = 0$, $u_{xx}(t, x) = 0$ at $x = 0, \ell$, and initial conditions $u(t, x) = u_0(x)$, $u_t(t, x) = u_1(x)$ at $t = 0$. Then, the performance index functional of the system to be minimized on the control duration is given by as follows;

$$\mathcal{J}(\hbar(t)) = \int_0^\ell [\vartheta_1 u^2(t_f, x) + \vartheta_2 u_t^2(t_f, x)]dx + \vartheta_3 \int_0^{t_f} \hbar^2(t)dt \qquad (2)$$

in which $\vartheta_1, \vartheta_2 \geq 0$, $\vartheta_1 + \vartheta_2 \neq 0$ and $\vartheta_3 > 0$ are weighting constants. First integral on the left-hand side in equation (2) represents the modified dynamics response of the water waves system. First and second terms in this integral are quadratic functional of the displacement and velocity of the water wave, respectively. Second integral on the left-hand side in equation (2) is the measure of the total canal depth on the $(0, t_f)$.

2. Numerical Results. By using the Pontryagin's maximum principle, optimal canal depth function is obtained as follows;

$$\mathcal{H}(t, x) = \hbar(t)\theta(x), \quad \hbar(t) = \frac{-\Phi(t)}{2\vartheta_3}, \quad \Phi(t) = \int_0^\ell w(t, x)\theta(x)dx, \qquad (3)$$

in which w is the solution of the following system;

$$w_{tt} + \alpha(w_{ttxx} - w_{ttxxxx}) - \beta w_{txx} + \gamma w_{xxxx} + w_{xx} = 0,$$

$$w(t, x) = 0, \quad w_{xx}(t, x) = 0 \text{ at } x = 0, \ell,$$

$$-2\vartheta_1 u(t_f, x) = w_t(t_f, x) + \alpha[w_{txx}(t_f, x) - w_{txxxx}(t_f, x)] - \beta w_{xx}(t_f, x),$$

$$2\vartheta_2 u_t(t_f, x) = w(t_f, x) + \alpha[w_{xx}(t_f, x) - w_{xxxx}(t_f, x)].$$

Before giving the numerical example, consider the optimal canal depth control function given by equation (3), in which, it is clear that as the value of ϑ_3 is decreasing, the value of the canal depth is increasing. As a conclusion of this situation, dynamic response of the excessive water waves given by first integral on the left side of equation (2) is minimized by using minimum canal depth. Also, in numerical computations, $\mathcal{N}(u)$ is considered as 0 due to difficulties on solving system of equations (1) with the respective initial and boundary conditions. Weighted coefficients are taken into account as $\vartheta_{1,2} = 1$ and $\vartheta_3 = 10^4$ and $\vartheta_3 = 10^{-4}$ for uncontrolled and controlled case, respectively. Numerical values are computed on the middle of the canal, $x = 0.5$. The introduced control algorithm is valid for all coefficients in the system but due the stability of the solutions of equations (1), following coefficients are imposed. In the numerical example, followings are taken into account: $\alpha = 0.01$, $\beta = 0.001$, $\gamma = 0.0001$, $\ell = 1$, $t_f = 3$, $\theta(x) = 1$, $f(t,x) = te^x$, $u_0(x) = \cos(\pi x)$, $u_1(x) = \sqrt{2}\sin(\pi x)$.

Let us give the dynamic response of the wave in the canal system and used canal depth accumulates over $(0, t_f)$, respectively, as follows;

$$\mathcal{J}(u) = \int_0^1 [u^2(t_f,x) + u_t^2(t_f,x)]dx, \quad \mathcal{J}(\hbar) = \int_0^{t_f} \hbar^2(t)dt. \tag{4}$$

The dynamic response of the wave in the canal system is given by table form and it seemed from Table 1 that as weighted coefficient ϑ_3 in canal depth control function decreases, dynamic response of the wave decreases due to an increasing in the value of canal depth control function. These results indicate that introduced control actuation is very effective and applicable to other waves control system including nonlinear terms.

Table 1 — The values of $\mathcal{J}(u)$ and $\mathcal{J}(\hbar)$ for different values of ϑ_3

ϑ_3	$\mathcal{J}(u)$	$\mathcal{J}(\hbar)$
10^4	1.8 e-3	2.7 e-9
10^0	5.0 e-4	2.2 e-3
10^{-4}	3.9 e-10	6.0 e-2

References

1. *Varlamov V. V.* On the initial boundary value problem for the damped Boussinesq equation // Dis. Con. Dyn. Sys. 1998. Vol. 98. P. 431–444.
2. *Schneider G., Eugene C. W.* Kawahara dynamics in dispersive media // Physica D. 2001. Vol. 152. P. 384–394.

STABILIZATION OF A CLASS OF HYPERBOLIC SYSTEMS COUPLED WITH INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

A.L. Zuyev

Otto von Guericke University Magdeburg, Magdeburg, Germany
Institute of Applied Mathematics and Mechanics,
National Academy of Sciences of Ukraine, Sloviansk, Ukraine
zuyev@mpi-magdeburg.mpg.de, zuyev@ovgu.de

Consider a hyperbolic system of the form

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} + G(x,c)\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} = \psi(x)w(x,t),\ w(x,t) \in \mathbb{R}^n,\ x \in [0,l],\ t \geq 0, \tag{1}$$

subject to the boundary conditions

$$w_i(0,t) = B_i(c)/G_i(0,c),\ (B_i \geq 0,\ G_i > 0,\ i = 1,2,...,n), \tag{2}$$

where the function $c = c(t)$ is defined by

$$\frac{dc(t)}{dt} = F\left(c(t), \int_0^l \phi(x)w(x,t)dx, u\right), \tag{3}$$

and u is treated as the control. The above control system was studied as a mathematical model of the continuous crystallization process ($n = 1$) or preferential crystallization of two enantiomers ($n = 2$) in [1], where information about the physical meaning of its state variables and coefficients was also presented.

In this talk, we present a new control design scheme to stabilize the equilibrium of system (1)–(3) by means of a state feedback law for different values of n.

This work was supported in part by the German Research Foundation (project ZU 359/2-1).

References

1. *Sklyar G., Zuyev A. (Eds.)* Stabilization of Distributed Parameter Systems: Design Methods and Applications. Springer, 2021.

АЛГОРИТМ ПРОГОНКИ РЕШЕНИЯ ДИСКРЕТНОЙ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С НЕРАЗДЕЛЕННЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Ф.А. Алиев[1,2], М.М. Муталлимов[1,2], Л.И. Амирова[1]

[1]Институт прикладной математики, БГУ, Баку, Азебайджан
mmutallimov@bsu.edu.az

[2]Институт информационных технологий, НАНА, Баку, Азебайджан
f_aliev@yahoo.com

Введение. Известно, что задачи оптимизации с неразделенными двухточечными и многоточечными краевыми условиями [1] играют важную роль при решении многих практических задач, таких как построение оптимальных программных траекторий и управлений для движения шагающих аппаратов [2], для движения как и газа, так и газо-жидкостной смеси на кольцевом пространстве и подъемнике [3] при добыче нефти газлифтым способом.

1. Постановка задачи. Сначала рассмотрим ЛК задачи оптимизации с двухточечными неразделенными краевыми условиями, т.е. пусть движение объекта описывается следующей дискретной линейной управляемой системой

$$x(i+1) = \psi(i)x(i) + \Gamma(i)u(i),\ i = 1, 2, \dots, \ell, \tag{1}$$

с неразделенными краевыми условиями

$$\Phi_1 x(0) - \Phi_2 x(\ell) = q, \tag{2}$$

где $x(i)$ — n-мерный фазовый вектор, $u(i)$ — m-мерное управляющее воздействие, $\psi(i)$, $\Gamma(i)$ и постоянные Φ_1, Φ_2 — матрицы размерности $n \times n$, $n \times m$ и $k \times n$, соответственно, известный постоянный вектор q имеет размерность k.

Требуется найти такие векторы $x(i)$, $u(i)$, $i = 1, 2, \dots, \ell - 1$, чтобы квадратичный функционал

$$J = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{l-1} \left(x'(i)R(i)x(i) + u'(i)C(i)u(i) \right) \tag{3}$$

при ограничениях (1), (2) получил минимальное значение, где $R(i) = R'(i) \geq 0$, $C(i) = C'(i) > 0$ симметричные матрицы размерности $n \times n$, $m \times m$ соответственно, штрих означает операцию транспонирования.

2. Метод прогонки. Используя необходимые условия оптимальности в форме Эйлера-Лагранжа задачи (1)-(3) можно показать, что решение задачи (1)-(3) сводится к решению следующей системы линейных конечно-разностных уравнений $2n$ порядка

$$\left.\begin{array}{l} x(i+1) = \psi(i)x(i) - M(i)\lambda(i+1) \\ \lambda(i) = R(i)x(i) + \psi'(i)\lambda(i+1) \end{array}\right\} \tag{4}$$

со следующими краевыми условиями

$$\Phi_1'\nu + \lambda(0) = 0, \ -\Phi_2'\nu + \lambda(\ell) = 0 \tag{5}$$

и (2), где $M(i) = \Gamma(i)C^{-1}(i)\Gamma'(i)$.

Далее, используя методику, изложенную в [4], решение задачи (4), (5) получим в следующем виде:

$$x(i+1) = \psi(i)x(i) - M(i)\left\{\sum_{k=0}^{i}\left(\prod_{j=k}^{i}\psi'^{-1}(i+k-j)\right)R(k)x(k) - \right.$$

$$\left. - \left(\prod_{k=0}^{i}\psi^{-1}(i-k)\right)\Phi_1'\nu\right\}, \ i = 0, 1, \ldots, \ell - 1,$$

а $u(i)$ будет

$$u(i) = C^{-1}(i)\Gamma'(i)\left\{\sum_{k=0}^{i}\left(\prod_{j=k}^{i}\psi'^{-1}(i+k-j)\right)R(k)x(k) + \right.$$

$$\left. + \left(\prod_{k=0}^{i}\psi'(i-k)\right)\Phi_1'\nu\right\}, \ i = 0, 1, \ldots, \ell - 1.$$

Библиографические ссылки

1. *Алиев Ф.А.* Методы решения прикладных задач оптимизации динамических систем. Баку: Елм, 1989.
2. *Ларин В.Б.* Управление шагающими аппаратами. Киев: Наук. думка, 1980.
3. *Mutallimov M.M., Aliyev F.A.* Methods for solving optimization problems in the operation of oil wells. Saarbrucken: LAP LAMBERT, 2012.
4. *Aliev F.A., Mutallimov M.M., Maharramov I.A., Huseynova N.Sh., Amirova L.I.* About One Sweep Algorithm for Solving Linear-Quadratic Optimization Problem with Unseparated Two-Point Boundary Conditions. Sahand Communications in Mathematical Analysis (SCMA). 2020. Vol. 17. No. 1, P. 99–107.

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКОВ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫМИ РАЗНОСТНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

С.Т. Алиева[1], К.Б. Мансимов[1,2]

[1]Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджан
saadata@mail.ru
[2]Институт систем управления НАН Азербайджана, Баку, Азербайджан
kamilbmansimov@gmail.com

Рассматривается задача оптимального управления дискретным объектом, описываемой системой нелинейных разностных уравнений дробного порядка и терминальным критерием качества.

Пусть требуется найти минимальное значение терминального функционала

$$S(u) = \varphi(x(t_1))$$

при следующих ограничениях

$$u(t) \in U \in R^r,$$
$$\Delta^\alpha x(t+1) = f(t, x(t), u(t)), t \in T,$$
$$x(t_0) = x_0.$$

Здесь $x(t)$ — n-мерный вектор фазовых переменных, $u(t)$ — r-мерный дискретный вектор управляющих воздействий, t_0, t_1 — заданные числа, x_0 — заданный постоянный вектор, $f(t, x, u)$ — заданная n-мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по x и u до второго порядка включительно, $\varphi(x)$ — заданная, дважды непрерывно дифференцируемая скалярная функция, $\Delta^\alpha x(t)$, $0 < \alpha \leq 1$ — дробный оператор порядка α [1–5], а U заданное непустое ограниченное и открытое множество.

Применяя модифицированный вариант метода приращений и учитывая открытость области управления, вычислены первая и вторая вариации (в классическом смысле) функционала качества. Учитывая равенство нулю первой вариации критерия качества вдоль оптимального процесса, доказано необходимое условие оптимальности первого порядка в форме аналога уравнения Эйлера [6–10], позволяющее найти классические экстремали. Далее путем исследования второй вариации критерия качества установлено конструктивно проверяемое необходимое условие оптимальности второго порядка типа [7, 8]. Этот результат существенно сужает множество классических экстремалей подозрительных на оптимальности.

Библиографические ссылки

1. *Miller K., Ross B.* An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. New York: Wiley, 1993. 366 p.
2. *Feckan M., Wang J., Pospisil M.* Fractional-order equations and inclusions. 2010. Vol. 3. 384 p.
3. *Podlubny I.* Fractional differential equations. San Diego: Acad. Press, 1999. 340 p.
4. *J. Jagan Mohan, Deekshitulu G.V.* Fractional order difference equations // International journal of differential equations. 2012. Article ID 780619. P. 1–11.
5. *Nuno R.O. Bastos Rui A.C., Ferreria, Delfim F.M. Torres* Necessary optimality conditions for fractional difference problems of the calculus of variations. Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series B (DCDS-B). 2010. P. 21.
6. *Розоноэр Л.И.* Принцип максимума Л.С. Понтрягина в теории оптимальных систем. I // Автоматика и телемеханика. 1959. Т. 20. № 10. С. 1320–1334.
7. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* К теории необходимых условий оптимальности для дискретных систем // Автоматика и телемеханика. 1971. № 12. С. 58–65.
8. *Мансимов К.Б.* Дискретные системы. БГУ, 2013. 151 с.
9. *Габасов Р., Кириллова Ф.М., Альсевич В.В., и др.* Методы оптимизации. Минск: Четыре четверти, 2011. 472 с.
10. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Особые оптимальные управления. М.:URSS,2013.

ОБ УСЛОВИЯХ ОПТИМАЛЬНОСТИ ОСОБЫХ ДИСКРЕТНЫХ УПРАВЛЕНИЙ ДЛЯ ОДНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

В.В. Альсевич

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
alsevichvv@mail.ru

В классе дискретных управляющих воздействий рассматривается следующая задача оптимального управления:

$$J(u) = \varphi(x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t^*)) \to \min, \tag{1}$$

$$\dot{x}(t) = B(x(t), x(t-\nu))u(t), t \in T = [0, t^*], x(t) = x_0(t), t \in [-\nu, 0], \tag{2}$$

$$u(t) \in U, \quad t \in T. \tag{3}$$

Здесь: $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^r$, $0 < t_1 < \ldots < t_K = t^*$, K — натуральное число, U — выпуклый компакт, $\nu > 0$ — запаздывание.

Напомним, что управление $u(t) \in U$, $t \in T$, называется дискретным (с периодом квантования $h > 0$), если $u(t) = u(\tau)$, $t \in [\tau, \tau + h)$, $\tau \in T_h = \{0, h, 2h, \ldots, t^* - h\}$, где $h = t^*/N$, N — натуральное число.

В дальнейшем все вектора понимаются как вектор-столбцы. Для транспонирования используется знак $'$ (штрих).

Обозначим $y(t) = x(t-\nu)$, $z_i = x(t_i)$, $i = \overline{1, K}$, $z = (z_1, \ldots, z_K)$. Для упрощения выкладок будем считать, что $t_i \in T_h$, $i = \overline{1, K}$, $\nu = Mh$, M — натуральное число. Пусть функции $\varphi(z)$, $B(x, y)$ непрерывно дифференцируемы.

Как обычно, обозначим $H(x, y, \psi, u) = \psi' B(x, y) u$. Пусть $u(t)$, $t \in T$, — допустимое управление в задаче (1)–(3), $x(t)$, $t \in T$, — соответствующая траектория системы (2). Для сокращения записей в дальнейшем иногда будем использовать обозначения:$H(t) = H(x(t), y(t), \psi(t), u(t))$, $B(t) = B(x(t), y(t))$, $f(t) = B(t)u(t)$, $\delta_\omega(t) = 1$, $t \in \omega$, $\delta_\omega(t) = 0$, $t \notin \omega$. Здесь $\psi(t)$, $t \in T$, — решение сопряженной системы

$$\dot{\psi}(t) = -\frac{\partial H(t)}{\partial x} - \delta_{[0, t^* - \nu]}(t) \frac{\partial H(t+\nu)}{\partial y}, \quad t \in T, \quad \psi(t^*) = -\frac{\partial \varphi(z)}{\partial z_K},$$

$$\psi(t_i - 0) = \psi(t_i + 0) - \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z_i}, \quad i = \overline{1, K-1}.$$

Теорема 1. *Оптимальное управление $u(t)$, $t \in T$, в задаче (1)–(3) и соответствующие траектории $x(t)$, $\psi(t)$, $t \in T$, прямой и сопряженной систем удовлетворяют условию максимума:*

$$\left(\int_t^{t+h} \psi'(s) B(s) ds \right) u(t) = \max_{v \in U} \left(\int_t^{t+h} \psi'(s) B(s) ds \right) v, \quad t \in T_h.$$

По аналогии с кусочно-непрерывными управлениями введем понятие особого управления. Пусть существует $\tilde{T}_h \subseteq T_h$, что для всех $v \in U$, $t \in \tilde{T}_h$ выполняется тождество

$$\left(\int_t^{t+h} \psi'(s) B(s) ds \right) u(t) \equiv \left(\int_t^{t+h} \psi'(s) B(s) ds \right) v.$$

Управление $u(t)$, $t \in T$, для которого выполняется последнее тождество, называется особым.

Будем считать, что функции $B(x, y)$, $\varphi(z)$ дважды непрерывно дифференцируемы по своим переменным.

Теорема 2. *Если $u(t)$, $t \in T$, — оптимальное особое управление в задаче (1)-(3), то вдоль него и соответствующих решений $x(t)$ и*

$\psi(t)$, $t \in T$, прямой и сопряженной систем выполняется условие (4) для $t \notin \tilde{T}_h$, а для $t \in \tilde{T}_h$ — условие

$$\big(v - u(t)\big)'\Bigg(\int\limits_t^{t+h}\Big(B'(\tau)\overline{\Psi}(\tau) + \big(\frac{\partial \psi'(\tau)B(\tau)}{\partial x}\big)'\Big)\int\limits_t^{\tau} B(s)ds d\tau\Bigg)\big(v - u(t)\big) \le 0$$

для всех $v \in U$, где $\overline{\Psi}(t) = \Psi(t) + C(t)$, $C(t) = \delta_{[0,t^*-\nu[}(t)\int_{t+h}^{t^*} G(\tau,t)d\tau$, $\Psi(t)$ — решение матричного уравнения

$$\dot{\Psi}(t) = -\frac{\partial f'(t)}{\partial x}\Psi(t) - \Psi(t)\frac{\partial f(t)}{\partial x} - \frac{\partial^2 H(t)}{\partial x^2} - \delta_{[0,t^*-\nu[}(t)\frac{\partial^2 H(t+\nu)}{\partial y^2}, t \in T,$$

$$\Psi(t^*) = -\frac{\partial^2 \varphi(z(t^*))}{\partial z_K^2},$$

$$\Psi(t_i - 0) = \Psi(t_i + 0) - \frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z_i^2}\sum_{j=i+1}^{K}\left(\frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z_i \partial z_j}F(t_j, t_i) + F'(t_j, t_i)\frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z_j \partial z_i}\right),$$

$$G(\tau, t) = F'(\tau, t)\Gamma(\tau, t) + \Gamma'(\tau, t)F(\tau, t),$$

$$\Gamma(\tau, t) = \Big(\frac{\partial^2 H(\tau)}{\partial x \partial y} + \Psi(\tau)\frac{\partial f(\tau)}{\partial y}\Big)F(t - \nu, t),$$

$$\frac{\partial F(\tau, t)}{\partial t} = -F(\tau, t)\frac{\partial f(t)}{\partial x} - \delta_{[0,t^*-\nu[}(t)F(\tau, t+\nu)\frac{\partial f(t)}{\partial y}, \quad F(t,t) = E.$$

О ПРОСТЕЙШЕМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ПРОИЗВОДСТВЕННОГО ПОТРЕБЛЕНИЯ

В.В. Альсевич

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
alsevichvv@mail.ru

Как известно, в общей теории полезности для сравнения наборов товаров, закупаемых потребителем, служат функции полезности (ФП), которые, как правило, вводятся аксиоматически, исходя из аксиом отношения предпочтения. Эти функции по своим свойствам являются непрерывно дифференцируемыми.

В свое время автором данного сообщения вместе с Р.Ф. Габасовым были построены две ФП не аксиоматически, а исходя из модели потребителя. В общем случае они не имеют явного (формульного) выражения, однако для каждого набора товаров их значение можно подсчитать алгоритмически. По каждой переменной эти ФП являются кусочно-линейными (а, значит, недифференцируемыми в некоторых точках).

В данном докладе представлено простейшее решение задачи производственного потребления с ФП, построенной по доходу.

Напомним [1], что ФП производственного потребления, построенная по доходу, имеет вид

$$U_R(x) = \max_{z \in Z(x)} R(z|x), \quad x \geq 0, \tag{1}$$

где: $R(z|x) = c'z$ — доход потребителя, в роли которого выступает некоторое предприятие, выпускающее n типов продукции, план выпуска которых $z(x) = (z_1(x), \ldots, z_n(x))$ зависит от приобретаемого предприятием набора m производственных факторов $x = (x_1, \ldots, x_m)$, выступающих в данном случае в роли товаров; $Z(x) = \{z \in \mathbb{R}^n : \; Az \leq x, \; z \geq 0\}$; A — $(m \times n)$-матрица затрат, элементы которой a_{ij} представляют количество i-го товара, идущего на выпуск единицы продукции j-го типа; $c = (c_1, \ldots, c_n)$ — вектор цен на выпускаемую продукцию. Заметим, что все векторы понимаются как вектор-столбцы, $'$(штрих) — знак транспонирования.

Пусть $p = (p_1, \ldots, p_n)$ — вектор цен на товары, K — бюджет потребителя, в качестве которого может выступать количество оборотного капитала. Тогда задача теории потребления в неоклассической постановке с ФП (1) примет вид:

$$U_R(x) = \max_z c'z \to \max_x, \quad Az - x \leq 0, \quad p'x \leq K, \quad z \geq 0, x \geq 0. \tag{2}$$

Задача (2) — задача линейного программирования и ее можно решить, например, симплекс-методом. Однако в силу специфики ее элементов решение намного упрощается. В самом деле, как было показано в [1] с помощью теории двойственности линейного программирования, в случае двойственно невырожденного оптимального плана предприятие выпускает один вид продукции с номером j_0 и решение представимо в виде

$$z_j^0 = 0, \; j \neq j_0, \; z_{j_0}^0 = K/(p'a_{j_0}), \quad x^0 = Ka_{j_0}/(p'a_{j_0}). \tag{3}$$

Оказывается, номер j_0 определяется из равенства

$$c_{j_0}/(p'a_{j_0}) = \max_{j=\overline{1,n}} \left(c_j/(p'a_j)\right). \tag{4}$$

В случае двойственно вырожденного оптимального плана возможно неоднозначное решение. Но и оно может быть определено, исходя из равенства (4). Пусть

$$S^0 = \{s = \overline{1,n} : \, c_s/(p'a_s) = \max_{j=\overline{1,n}} (c_j/(p'a_j))\},$$

$(z^{0s}, \, x^{0s})$, $s \in S^0$, — оптимальные планы задачи (2), вычисленные по формулам (3) с заменой j_0 на $s \in S^0$. Тогда для любых

$$0 \le \alpha_s \le 1, \, s \in S^0, \quad \sum_{s \in S^0} \alpha_s = 1, \tag{5}$$

оптимальными будут и планы

$$\left(z^0 = \sum_{s \in S^0} \alpha_s z^{0s}, \quad x^0 = \sum_{s \in S^0} \alpha_s x^{0s} \right).$$

Другими словами, в случае неоднозначного оптимального набора товаров потребитель вправе самостоятельно выбрать стратегию (5) построения оптимального плана, при которой может выпускаться не один вид продукции.

Библиографические ссылки

1. *Альсевич В.В.* Введение в математическую экономику. Кн. 1: Конструктивная теория. Учеб. пособие. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2021.

ОПТИМАЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ В СИСТЕМАХ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Н.А. Андрюшечкина[1], Г.А. Бочаров[2], А.В. Ким[3], А.С. Мамаджонов[4]

[1] Уральский государственный аграрный университет, Екатеринбург, Россия
nadia@mail.ru

[2] Институт вычислительной математики им. Г.И. Марчука РАН, Москва, Россия
bocharov@inm.ras

[3] Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия
avkim@imm.uran.ru

[4] Уральский федеральный университет им. первого президента России Б.Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия
akmali1997@mail.ru

Рассматриваются обобщения, современные методы анализа и решения рассмотренных в [1] задач управления системами с последействием

$$\dot{x}(t) = f[t, x(t), x(t+s), u], \; -\tau \le s \le 0 \tag{1}$$

$(f(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot) : R \times R^n \times Q[-\tau,0) \times R^r \to R^n)$.

В дальнейшем используются обозначения: $\tau = const > 0$, $h = \{x, y(\cdot)\} \in H = R^n \times Q[-\tau,0)$, $\|h\|_H = \max\{\|x\|, \|y(\cdot)\|_\tau\}$; понятия и конструкции i-гладкого анализа [2, 3].

В работе в рамках общего подхода [1, 4] разработаны, на основе методологии i-гладкого анализа [2, 3], конструктивные алгоритмы решения следующих задач [1]:

Задача 1.1. Найти управление $u = u^0(t, x, y(\cdot)) : R \times R^n \times Q[-\tau,0) \to R^r$ такое, что движение $x \equiv 0$ в замкнутой системе (1) (т.е при $u(t) = u^0(t, x_t)$) асимптотически устойчиво относительно возмущений из области $G_0 = \{\|h\|_H \le \eta\}$, и такое, что для всех $t_0 \ge 0$ и $h^0 \in G_0$ имеет место минимум $I_\infty[t_0, h^0, u^0] = \min_{u\in\Xi} I_\infty[t_0, h^0, u] = \int_0^\infty \Phi[x(t), u(t)]dt$.

Задача 1.2. Найти управление $u = u^0(t, x, y(\cdot)) : R \times R^n \times Q[-\tau,0) \to R^r$, обеспечивающее минимум $I[t_0, h^0, u^0] = \min_{u\in\Xi} I[t_0, h^0, u] = \int_0^T \Phi[x(t, t_0, h^0, u), u(t)]dt$ ($T > t_0$ — заданный момент времени, $\|x^0(t_0)\|_H \le \eta$.

Задача 1.3. Найти управление $u = u^0(t, x, y(\cdot)) : R \times R^n \times Q[-\tau,0) \to R^r$, обеспечивающее минимум $I_\infty[t_0, h^0, u^0] = I_T = \min_{u\in\Xi} \int_0^T \Phi[x(t), u(t)]dt$, при $T \to \infty$.

Разрабатываемые методы будут использованы для решения задач управления и регуляции иммунными процессами при вирусных инфекциях человека (ВИЧ и инфекция SARS-CoV-2) [5–7]. В соответствующих моделях будут рассмотрены различные регуляторные контуры (обратная связь, связь с опережением, унимодальные и бимодальные отклики, интегральный контроль, репрессилятор и др.) [7].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект: 20-01-00352-а).

Библиографические ссылки

1. *Красовский Н.Н.* Оптимальные процессы в системах с запаздыванием // Доклад, представленный на Второй Международный конгресс ИФАК г. Базель, Швейцария (27 августа - 4 сентября 1963 г.) / Междунар. федерация по автомат. упр. (ИФАК). Нац. ком. Советского Союза по автомат. упр.; 11.
2. *Ким А.В.* i-Гладкий анализ и функционально-дифференциальные уравнения. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 1996.
3. *Kim A.V.* i-Smooth analysis. Theory and Applications. New Jersey: Wiley, 2015.
4. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физ.-мат. лит., 1959.
5. *Черешнев В.А., Бочаров Г.А., Ким А.В., Бажан С.И., Гайнова И.А., Красовский А.Н., Шмагель , Иванов А.В., Сафронов М.А., Третьякова Р.М.* Вве-

дение в задачи моделирования и управления динамикой ВИЧ инфекции. М.-Ижевск: АНО «Ижевский институт компьютерных исследований», 2016.

6. *Bocharov G., Casella V., Argilaguet J., Grebennikov D., Guerri-Fernandez R., Ludewig B., Meyerhans A.* Numbers game and immune geography as determinants of coronavirus pathogenicity // Frontiers in Cellular and Infection Microbiology. 2020. Vol. 10.
7. *Bocharov G.A., Grebennikov D.S., Savinkov R.S.* Mathematical immunology: from phenomenological to multiphysics modelling // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2020. Vol. 35. No. 4. P. 203–213.

ДОКАЗАТЕЛЬНЫЙ МЕТОД ДЛЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКОЙ И ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

А.С. Антипин[1], Е.В. Хорошилова[2]

[1] ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия
asantip@yandex.ru

[2] МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия
khorelena@gmail.com

На конечном отрезке времени $[t_0, t_1]$ рассматривается задача оптимального управления с линейной динамикой и непрерывными фазовыми ограничениями в виде неравенства. Терминальное условие на правом конце отрезка задано неявно как решение краевой задачи линейного программирования. Формально задача включает две компоненты: управляемую динамику и краевую задачу, и формулируется в виде

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x(t) = D(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1^*, \\ \qquad G(t)x(t) \le g(t),\ \ x(\cdot) \in \mathbb{AC}^n[t_0, t_1],\ u(\cdot) \in \mathrm{U}, \\ \qquad x_1^* \in \mathrm{Argmin}\{\langle \varphi_1, x_1\rangle \mid G_1 x_1 \le g_1,\ x_1 \subset \mathbb{R}^n\}, \end{cases} \tag{1}$$

где $D(t), B(t), G(t)$ – непрерывные матрицы, φ_1, $g(t)$ – заданные вектор и непрерывная функция; $G(t_1) = G_1$, $g(t_1) = g_1$, x_0 также заданы; $\mathbb{AC}^n[t_0, t_1]$ есть линейное многообразие абсолютно непрерывных функций; $x(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))^{\mathrm{T}}$ – траектория (фазовая переменная). Для каждого $t \in [t_0, t_1]$ вектором $u(t) = (u_1(t), ..., u_r(t))^{\mathrm{T}} \in \mathrm{U}$ обозначает управление, где $\mathrm{U} \in \mathbb{R}^r$ есть выпуклый компакт.

Задача (1) рассматривается в гильбертовом пространстве $\mathbb{L}_2^n[t_0, t_1]$ и является обобщением задачи линейного программирования. В основу используемого подхода положен лагранжев формализм: решение исходной задачи сводится к поиску седловых точек лагранжиана. Для этого вводится функция Лагранжа. К лагранжиану выписывается двойственный лагранжиан и принимается во внимание, что в регулярном случае прямой и двойственный лагранжианы имеют одни и те же седловые точки $(x_1^*, x^*(\cdot), u^*(\cdot); p_1^*, \psi^*(\cdot), \eta^*(\cdot))$.

Отталкиваясь от седловых неравенств для двойственного лагранжиана, выводится двойственная задача [1, 2]. Комбинируя основные элементы взаимно-двойственных задач, формируется дифференциальная система

$$\frac{d}{dt}x^*(t) = D(t)x^*(t) + B(t)u^*(t), \quad x^*(t_0) = x_0,$$

$$\langle G_1 x_1^* - g_1, p_1 - p_1^* \rangle \le 0, \quad p_1 \ge 0,$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \langle G(t)x^*(t) - g(t), \eta(t) - \eta^*(t) \rangle dt \le 0, \quad \eta(t) \ge 0, \ t \in [t_0, t_1],$$

$$\frac{d}{dt}\psi^*(t) + D^{\mathrm{T}}(t)\psi^*(t) + G^{\mathrm{T}}(t)\eta^*(t) = 0, \quad \psi_1^* = \nabla\varphi_1(x_1^*) + G_1^{\mathrm{T}} p_1^*,$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \langle B^{\mathrm{T}}(t)\psi^*(t), u^*(t) - u(t) \rangle dt \le 0, \quad u(\cdot) \in \mathrm{U},$$

где $x_1^* = x^*(t_1)$, отражающая необходимое и достаточное условия оптимальности для задачи (1). Для выпуклых задач, эти условия соответсвуют усиленному принципу максимума.

Для решения системы разработан седловой метод градиентного типа [3, 4]. Доказана сходимость итеративного процесса к решению задачи по всем его компонентам, в том числе сильная сходимость по фазовым и сопряжённым траекториям и слабая сходимость по управлениям.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 18-01-00312).

Библиографические ссылки

1. *Antipin A.S., Khoroshilova E.V.* Linear Programming and Dynamics // Ural Mathematical Journal. 2015. Vol. 1. № 1. P. 3–19.

2. *Antipin A.S., Khoroshilova E.V.* Saddle-point approach to solving problem of optimal control with fixed ends // Journal of Global Optimization. 2016. Vol. 65. No. 1. P. 3–17.
3. *Antipin A.S., Khoroshilova E.V.* Dynamics, phase constraints, and linear programming // Comput. Math. Math. Phys. 2020. Vol. 60. No. 2. P. 184–202.
4. *Antipin A.S., Khoroshilova E.V.* Controlled dynamic model with boundary-value problem of minimizing a sensitivity function // Optimization Letters. 2019. Vol. 13. No. 3. P. 451–473.

ВАРИАЦИОННЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ГИБРИДНЫМИ СИСТЕМАМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А.В. Аргучинцев

Иркутский государственный университет, Иркутск, Россия
arguch@math.isu.ru

Рассматривается специальный класс задач оптимального управления системой линейных гиперболических уравнений первого порядка следующего вида:

$$\frac{\partial x}{\partial t} + A(s,t)\frac{\partial x}{\partial s} = \Phi(s,t)x + f(s,t) + C(t)y, \tag{1}$$

$$(s,t) \in \Pi,\ \Pi = S \times T,\ S = [s_0, s_1], T = [t_0, t_1].$$

Здесь $x = x(s,t), y = y(t)$ — n и m-мерные вектор-функции соответственно; матрица $A(s,t)$ является диагональной с сохраняющими знак в Π непрерывными диагональными элементами. Задание начально-краевых условий для системы (1) в точках начала соответствующих характеристик при выполнении определенных условий гладкости и согласования обеспечивает существование и единственность почти классического решения гиперболической системы.

Фукнкция y в правой части (1) определяется из управляемой системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dt} = B(u(t),t)y(t) + d(u(t),t), \quad t \in T, \quad y(t_0) = y^0. \tag{2}$$

Здесь $B(u(t),t)$ является $m \times m$ матричной функцией.

Допустимые управления $u(t)$ предполагаются ограниченными на отрезке T функциями, удовлетворяющими почти всюду на этом отрезке классическим ограничениям типа включения

$$u(t) \in U,\ t \in T.$$

В работе [1] рассмотрен случай задачи минимизации линейного целевого функционала:

$$J(u) = \int\limits_S \langle \alpha(s), x(s,t_1) \rangle \, ds + \iint\limits_\Pi \langle b_0(s,t), x(s,t) \rangle \, ds \, dt \to \min .$$

Задачи такого типа возникают при управлении некоторыми процессами химической технологии, а также при моделировании динамики популяций с учетом возрастной структуры особей.

Матрица коэффициентов в правой части системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2) зависит от управления. Поэтому в рассматриваемой задаче классический принцип максимума Л.С. Понтрягина не является достаточным условием оптимальности. Для решения же подобных задач используются методы, разработанные для общих нелинейных случаев.

В упомянутой статье [1] за счет использования неклассической точной (без остаточного члена) формулы приращения целевого функционала исходная задача сведена к задаче оптимального управления системой обыкновенных дифференциальных уравнений.

В настоящем докладе рассматривается случай квадратичного целевого функционала. Задачи такого типа являются более интересными с практической точки зрения. В частности, квадратичным функционалом описывается цель достижения заданной плотности популяции в конечный момент времени.

Получены два варианта неклассических точных формул приращения целевого функционала второго порядка, в которых либо решение исходной задачи, либо решение сопряженной задачи вычисляется на возмущенных управлениях.

Применение этих двух вариантов формул приращения привело к двум несимметричным условиям оптимальности вариационного типа, на основе которых проведена редукция исходной задачи к задачам оптимального управления системами обыкновенных дифференциальных уравнений с квадратичными критериями качества.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Иркутской области в рамках научного проекта 20-41-385002.

Библиографические ссылки

1. *Arguchintsev A., Poplevko P.* An optimal control problem by a hybrid system of hyperbolic and ordinary differential equations // Games. 2021. Vol. 12. Paper 23.

О СВЕРХУСТОЙЧИВОСТИ РЕГУЛЯРНЫХ ДЕСКРИПТОРНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

И.К. Асмыкович

Белорусский государственный технологический университет, Минск, Беларусь
asmik@tut.by

В качественной теории управления динамическими системами в последние десятилетия большой популярностью пользуются линейные дескрипторные или гибридные системы [1, 2], то есть системы, неразрешенные относительно производной или содержащие алгебраическую часть. В дискретном случае такие системы имеют вид

$$Sx(t+1) = Ax(t) + Bu(t),\ Sx(0) = Sx_0,\ detS = 0, \tag{1}$$

с условием регулярности $det[\lambda S - A] \neq 0$.

Условие регулярности обеспечивает существование и единственность решения системы (1) при специальных условиях на управляющую последовательность $u(t)$.

Одним из основных свойств систем управления является свойство устойчивости решения в различных смыслах или возможности обеспечения такой устойчивости [2]. В работах [3, 4] предложено рассмотреть специальные классы «сверхустойчивые системы», решения которых обладают хорошими свойствами сходимости, и для них задачи качественной теории управления, такие как синтез статической обратной связи по выходу, робастная стабилизация, подавление возмущений сводятся к задачам линейного программирования и имеют достаточно хорошее численное решение. В докладе понятие сверхустойчивости рассмотрено для дискретных регулярных дескрипторных систем и дискретных нормализуемых дескрипторных систем [5].

Если система является скалярной, т.е. $B = b, C = c$, то используя приведение регулярного пучка $\lambda S - A$ к канонической форме Вейерштрасса, можно привести систему (1) к виду

$$x_v(t+1) = Lx_v(t) + b_1u(t), \tag{2}$$

$$Nx_w(t+1) = x_w(t) + b_2u(t). \tag{3}$$

При этом задача рассмотрения свойства сверхустойчивости сводится к изучению обыкновенной системы (2), нильпотентной системы (3) и случаев инвариантности изучаемого свойства при переходе к канонической форме Вейерштрасса. Для нормализуемых систем такое исследование упрощается. Аналогичные задачи рассмотрены для многовходных систем и будут изучены для дескрипторных систем с запаздыванием [6]. При этом хорошо использовать вторую эквивалентную форму дескрипторных систем, которая получается путем преобразования матрицы S, и ее модификацию из [6], которая получается путем выделения дифференциальной части и использования линейной обратной связи по состоянию, т.е.

$$\hat{S} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{13} & A_{14} \\ 0 & I_2 & 0 & 0 \\ A_{31} & 0 & 0 & 0 \\ A_{41} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{B} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \\ I_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Библиографические ссылки

1. Дескрипторные системы управления: библиографический указатель / сост. И.К Асмыкович. Минск: БГТУ, 2020, 305 с.
2. *Asmykovich I.K., Borkovskaya I.M.* On the Stabilization of Hybrid Dynamic Systems // Proc. of the 14th International scientific-technical conference on actual problems of electronic instrument engineering (APEIE). Vol. 1. Part 4. Sections Mathematical Simulation Computer Engineering. Information Systems and Technologies. Novosibirsk. P. 13–16.
3. *Polyak B.T., Sznaier M., Shcherbakov P.S., Halpern M.* Superstable control systems // Proc. IFAC 15th World Congress, Barcelona, Spain. 2002. P. 799–804.
4. *Кунцевич В.М.* О «сверхустойчивых» дискретных системах // Автоматика и телемеханика. 2007. № 4. С. 61–66.
5. *Асмыкович И.К.* О регуляризации и нормализации линейных дескрипторных систем //Автоматический контроль и автоматизация производственных процессов»: материалы межд. научно-технической конф. 22-24 октября. 2015 г. Минск, БГТУ, 2015. С. 188–191.
6. *Марченко В.М., Асмыкович И.К.* О представлении решений дескрипторных систем с запаздыванием // Труды БГТУ, Физ.-мат. науки и информ., 2011. № 6(144). С. 3–6.

НАБЛЮДАЕМОСТЬ И УПРАВЛЯЕМОСТЬ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДИАБЕТА

А.И. Астровский

Белорусский государственный экономический университет, Минск, Беларусь
aastrov@tut.by

В данной работе для математической модели диабета первой степени [1] рассматриваются задачи наблюдаемости, управляемости и оценивания на основе подхода, предложенного в [2, 3].

По данным Международной федерации диабета в 2014 году 385 млн. человек болело диабетом разного типа. По прогнозам в 2035 году больных диабетом будет около 600 млн. человек. Математическое моделирование особенностей диабета первого типа — мощный инструментарий, позволяющий описывать динамическое взаимодействие системы лечения и состояния пациента. Диабет первой степени контролируется терапией, основанной на введении инсулина. Избыточное введение инсулина может вызвать гипогликемию (низкий уровень глюкозы в крови), что очень опасно для человеческого организма в краткосрочной перспективе. Пациентам следует назначать определенные дозы инсулина перед каждым приемом углеводов. Подбор этой дозу инсулина — довольно сложная задача, в основном из-за вариабельности эффектов инсулина и присутствие углеводов с разной скоростью поглощения. Лечение с помощью инсулиновых помп основано на непрерывной автоматической оценке состояния пациента и возможности при необходимости введения подкожной инъекции инсулина. Искусственная поджелудочная железа объединяет три компонента: инсулиновую помпу, подкожный непрерывный мониторинг уровня глюкозы и алгоритм управления помпой.

Итак, одной из важных задач, возникающих при изучении диабета первой степени, является задача определения состояний пациента на основании измеренных значений подкожной концентрации глюкозы. Поэтому естественным образом возникают классические проблемы математической теории управления — наблюдаемость, управляемость и построение оценщиков (эстиматоров) состояний пациента.

Кратко опишем предложенную Говоркой (Hovorka) [1] модель диабета первой степени, в которой в качестве управляющих воздействий рассматриваются инсулиновые дозы $u(t)$ в ответ на прием пациентом углеводной пищи $D(t)$. В качестве выходных функций (наблюдений) берется концентрация глюкозы в плазме крови пациента $G(t)$. Модель Говорка состоит из подсистемы глюкозы, подсистемы инсулина и подсистемы действия инсулина на перенос, удаление и эндогенное производство глюкозы. Эта модель описывает инсулин-глюкозное взаимодействия в теле пациента и представляет собой систему из десяти нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, которые используют 15 параметров и следующие переменные: $D_1(t)$ — количество глюкозы в желудке пациента; $D_2(t)$ — количество глюкозы в кишечнике пациента; $U_G(t)$ — скорость абсорции глюкозы; $V(t)$ — проглоченная углеводная пища в минуту; A_G — параметр биоактивности углеводов; τ_S — время абсорции введенного инсулина; $Q_1(t)$ — количество глюкозы в кровяном потоке пациента; $Q_2(t)$ – количество глюкозы в периферийных тканях; V_G — объем распределения глюкозы, зависит от веса пациента; B_w — вес пациента; $F_{01}^c(t)$ – потребление глюкозы в центральной нервной системе; $F_R(t)$ — количество глюкозы, выработанной в почках; EGP_0 — количество глюкозы, произведенной печенью при нулевом уровне инсулина; $x_1(t)$ — влияние инсулина на транспортировку и распространение глюкозы; $x_2(t)$ — влияние инсулина на утилизацию глюкозы; $x_3(t)$ — действие инсулина на выработку эндогенной глюкозы в печени; $I(t)$ — концентрация инсулина в плазме крови; $S_1(t)$ — количество инсулина в крови; $S_2(t)$ — количество инсулина в периферийных тканях; $U_I(t)$ — скорость абсорции инсулина; V_I — объем зоны распределения инсулина; k_e — скорость поглощения инсулина; S_{IT} — показатель транспортировки инсулина; S_{ID} — показатель поглощения инсулина; S_{IE} =– показатель влияния инсулина на EGP_0.

В докладе на основе метода линеаризации исследуется наблюдаемость модели Говорка и описывается метод построения оценщиков состояний пациента.

Библиографические ссылки

1. *Hovorka R., Canonico V., Chassin L.J. et. al.* Nonlinear model predictive control of glucose concentration in subjects with type 1 diabets // Physiological measurement. 2004. Vol. 25 (4). P. 905–920.
2. *Астровский А.И., Гайшун И.В.* Оценивание состояний линейных нестационарных систем наблюдения // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55, № 3. С. 370–379.
3. *Astrovskii A.I., Gaishun I.V.* Observability of Linear Time-Varying Systems with Quasiderivative Coefficients // SIAM J. Control and Optimization. 2019. Vol. 57, № 3. P. 1710–1729.

К НЕОБХОДИМЫМ УСЛОВИЯМ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ, ОПИСЫВАЕМОЙ СИСТЕМОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Ж.Б. Ахмедова[1], К.Б. Мансимов[1,2]

[1]Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджан
akja@rambler.ru

[2]Институт систем управления НАН Азербайджана, Баку, Азербайджан
kamilbmansimov@gmail.com

Предположим, что управляемый процесс на заданном отрезке времени $[t_0, t_1]$ описывается следующей системой дифференциальных уравнений дробными производными Капуто

$$ {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} x(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad t \in [t_0, t_1], \tag{1} $$

$$ x(t_0) = x_0, \tag{2} $$

где

$$ {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} x(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int\limits_{t_0}^{t} \frac{x^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{1+\alpha-n}} d\tau, \;\; n = [\alpha] + 1, \alpha \in R_+ $$

— левая дробная производная Капуто [1].

Здесь $f(t, x, u)$ — заданная n-мерная непрерывная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по x до второго порядка включительно, $u = u(t)$ — r-мерный кусочно-непрерывный вектор управляющих воздействий, с конечным числом точек разрыва первого рода, со значениями из заданного непустого и ограниченного множества $U \subset R^r$, т.е. $u(t) \in U \subset R^r$, $t \in [t_0, t_1]$. Такие управляющие функции назовем допустимыми.

Предполагается, что каждому допустимому управлению $u(t)$ соответствует единственное непрерывное решение $x(t)$ системы (1), (2), см. [2, с. 597].

Задача оптимального управления заключается в минимизации терминального функционала

$$ S(u) = \varphi(x(t_1)), $$

определенного на решениях задачи Коши (1), (2). Здесь $\varphi(x)$ — заданная дважды непрерывно-дифференцируемая скалярная функция.

Предполагается, что в рассматриваемой задаче оптимального управления оптимальное управление существует.

Используя метод приращений, развитый в работах [3, 4], при некоторых предположениях доказано необходимое условие оптимальности типа принципа максимума Понтрягина.

В докладе рассмотрен случай вырождения (особый случай [5]) условия максимума Понтрягина.

Применяя методику, предложенную в [6] и развитую в работах [7, 8], доказаны необходимые условия оптимальности (в частности, аналог условия оптимальности Габасова-Кирилловой [5]).

В случае открытости области управления, используя условие неотрицательности второй вариации функционала качества вдоль оптимального управления, доказано конструктивно проверяемое необходимое условие оптимальности второго порядка.

Библиографические ссылки

1. *Samko S.G., Kilbas A.A. Marichev O.I.* Fractional Integrals and Derivatives – Theory and Applications. Gordon and Breach Longhorne Pennsylvania, 1993.
2. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка, и некоторые их приложения. Мн.: «Наука и техника», 1987.
3. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Принцип максимума в теории оптимального управления. М.: Либроком, 2011. 272 с.
4. *Габасов Р., Кириллова Ф.М., Альсевич В.В. и др.* Методы оптимизации. Мн.: «Четыре четверти», 2011. 472 с.
5. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Особые оптимальные управления. М.: Либроком, 2011. 256 с.
6. *Мансимов К.Б.* Необходимые условия оптимальности особых процессов в задачах оптимального управления // Автореф. дисс. на соиск.ученой степени д-ра физ.-мат. наук. Баку, 1994. 43 с.
7. *Мансимов К.Б.* Особые управления в системах с запаздыванием. Баку: ЭЛМ, 1999. 176 с.
8. *Марданов М.Дж., Мансимов К.Б., Меликов Т.К.* Исследование особых управлений и необходимые условия оптимальности второго порядка в системах с запаздыванием. Баку: ЭЛМ, 2013. 355 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ГУСЕНИЧНОЙ МАШИНКИ ПО ВОДЕ

А.В. Бойко, А.П. Голуб, В.А. Ерошин, В.А. Самсонов

НИИ механики МГУ, Москва, Россия
holub.imech@gmail.com

Введение. Исследование качения по поверхности воды колесных и гусеничных надводных аппаратов (багги, снегоходы, мотоциклы и пр.) вызывает большой интерес в последнее время. Необходимо подчеркнуть, что по сравнению с глиссерами и судами на подводных крыльях, качение по воде на колёсах и гусеницах позволяет в полтора-два раза увеличить скорость движения надводных судов, а также уменьшить расход топлива. Такие машины являются амфибиями, то есть могут двигаться по суше и мелководью с достаточно большой скоростью. Практическое использование этой идеи и объясняет интерес к вопросам определения гидродинамических сил, возникающих при качении по поверхности воды.

Постановка задачи. Рассматривается движение гусеничного объекта по поверхности воды. На гусенице присутствуют грунт зацепы, которые при взаимодействии с водой создают тягу. Будем рассматривать движение машинки, как плоскопараллельное. Для создания подъёмной силы, корпус наклонён к горизонтальной поверхности под некоторым постоянным углом (в данной задаче рассматривались малые углы наклона). Таким образом, в системе имеется две степени свободы – это координаты центра масс x и y. Вертикальная y указывает, насколько машинка погружена в воду, $\dot{x}$ – линейную скорость. Именно эти два параметра являются ключевыми, при изучении движения данного объекта. Во время движения на систему действуют сила тяжести, подъёмная сила и сила сопротивления со стороны воды на погруженную часть машинки, а также тяга создаваемая гусеницей. В модели учитывается погружение машинки, это приводит к изменению сил, связанных со взаимодействием с водой. Чем меньше погружена машинка, тем меньше тяга и подъёмная сила, но и меньше сила сопротивления. При глубоком погружении (когда гусеница погружена полностью) сила тяги и подъёмная силы считаются постоянными, а сила сопротивления увеличивается при дальнейшем погружении. Тяга и подъёмная сила моделируются на основе данных экспериментов, которые проводились на водоканале НИИ механики МГУ [1].

Результаты. Моделирование проведено для разных значений начальной скорости и скорости вращения гусеницы. Дана оценка начальной скорости и угловой скорости вращения гусеницы, при которой машинка не будет тонуть, а выйдет на режим движения по воде. Значение начальной скорости является одним из важных параметров. При её малой величине не всегда удаётся выйти на нужный режим, даже если скорость вращения гусеницы достаточно большая. Приведены результаты моделирования и получен диапазон значений, при которых возможно движение по поверхности воды.

Библиографические ссылки

1. *Boyko A.V., Golub A.P., Yeroshin V.A., Samsonov V.A.* Hydrodynamics of new high-speed surface systems // Journal of Physics: Conf. Series. 2020. Vol. 1666.

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ВХОДНЫХ СИГНАЛОВ В СИСТЕМАХ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

В.Т. Борухов, Г.М. Заяц

Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь
`val01@tut.by, zayats@im.bas-net.by`

При диагностике и управлении процессами переноса возникает широкий спектр задач идентификации. Среди них важные для технических и научных приложений задачи восстановления источников процессов теплопереноса, описываемых начально-краевыми задачами для систем уравнений в частных производных гиперболического типа.

Рассмотрим задачу идентификации временной компоненты источника тепла в нелинейной системе дифференциальных уравнений теплопроводности гиперболического типа, имеющей вид

$$\rho(T)c(T)\frac{DT}{Dt} = -\frac{\partial q}{\partial x} + g(x,t), \tag{1}$$

$$\tau\frac{Dq}{Dt} = -\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial x} - q, \quad x \in [0,l],\ t \in [0,t_f], \tag{2}$$

где $T = T(x,t),\ q = q(x,t)$ – искомые функции, $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v(x)\frac{\partial}{\partial x}$ – материальная производная, $\rho(T) > 0,\ c(T) > 0,\ \lambda(T) > 0,\ v(x),\ g(x,t)$ – гладкие функции. Применение материальной производной $\frac{D}{Dt}$ обеспечивает инвариантность системы уравнений (1), (2) относительно группы преобразований Галлилея [1]. Системы вида (1), (2) описывают процессы распространения тепла в нелинейной среде с учетом времени релаксации теплового потока τ и конвективной составляющей тепла. При $\tau = 0$ система уравнений (1), (2) приводится к стандартному нелинейному уравнению теплопроводности параболического типа, а при $\tau > 0$ и при отсутствии конвективного терма – к нелинейному уравнению теплопроводности гиперболического типа.

Систему уравнений (1), (2) дополним начальными и краевыми условиями

$$\begin{gathered} T(x,0)=T_0(x),\ q(x,0)=q_0(x), \\ T(0,t)=g_1(t),\ T(l,t)=g_2(t). \end{gathered} \tag{3}$$

Задача восстановления состоит в идентификации временных компонент $u(t) = colon\,(u_1(t), ..., u_m(t))$ функции источника

$$g(x,t)=\sum_{i=1}^{m} b_i(x)u_i(t)=b(x)u(t),\ b(x)=(b_1(x),...,b_m(x))\,, \tag{4}$$

по данным измерений взвешенных температур $y(t) = colon\ (y_1(t),\ ...,\ y_m(t))$, определяемых равенством

$$y(t)=\int\limits_0^l T(s,t)p(s)ds, \quad t\in[0,t_f], \tag{5}$$

где $p(x) = colon\,(p_1(x), ..., p_m(x))\,,\ p_i(x), i=\overline{1,m}$, – обобщенные функции (распределения конечного порядка сингулярности).

Систему уравнений (1)–(5) можно интерпретировать как распределенную динамическую систему вход-состояние-выход, где вектор временных компонент источника тепла $u(\cdot)$ является входным сигналом системы, пара функций $(T(\cdot,t),\ q(\cdot,t))$ – состояние системы в момент времени t, вектор взвешенных температур $y(\cdot)$ – выходной сигнал.

Для решения задачи применяем метод обратных динамических систем (ОДС) [2, 3], предполагающий два этапа: 1) вывод системы уравнений и краевых условий, определяющих ОДС, 2) решение начально-краевой задачи, полученной на первом этапе.

Построена начально-краевая задача, определяющая ОДС, являющаяся нестандартной (неклассической) задачей. Она содержит интегро-дифференциальные и функционально-дифференциальные термы. Разработан численный алгоритм, использующий разностные схемы и метод прогонки. Получены результаты численного моделирования обратной задачи (1)–(5) при отсутствии конвективного терма с учетом времени релаксации теплового потока ($v(x) = 0$, $\tau > 0$), а также в случае отсутствия конвективной составляющей тепла и без учета времени релаксации теплового потока ($v(x) = 0$, $\tau = 0$).

Библиографические ссылки

1. *Christov C.I., Jordan P.M.* Heat conduction paradox involving second-sound propagation in moving media // Phys. Rev. Lett. 2005. Vol. 94. 154301.
2. *Borukhov V.T., Kolesnikov P.M.* Method of inverse dynamic systems and its application for recovering internal heat sources // Int. J. Heat Mass Transfer. 1988. Vol. 31. P. 1549-1556.
3. *Borukhov V.T., Zayats G.M.* Identification of a time-dependent sourse term in nonlinear hyperbolic or parabolic heat equation // Int. J. Heat Mass Transfer. 2015. Vol. 91. P. 1106—1113.

ОБ ОДНОЙ ФОРМУЛЕ ДЛЯ МАКСИМАЛЬНО ИНВАРИАНТНОГО МНОГОЧЛЕНА СПЕКТРА ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

В.И. Булатов

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
bulatov@bsu.by

Рассмотрим стационарную систему

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{1}$$

где x — n-вектор траектории; u — r-вектор управления; A и B — вещественные $n \times n$ и $n \times r$-матрицы.

Для вещественной $r \times n$-матрицы Q замыкание системы (1) управлением

$$u = Qx \tag{2}$$

приводит к стационарной системе

$$\dot{x} = (A + BQ)x, \tag{3}$$

спектром которой является множество всех корней (с учетом их кратностей) характеристического многочлена

$$d(\lambda) = \det(\lambda E - A - BQ), \tag{4}$$

где λ – комплексная переменная.

Из [1,2] следует, что, во-первых, для любого управления (2) многочлен (4) делится без остатка на многочлен $\varphi(\lambda)$, являющийся наибольшим общим делителем всех миноров n-го порядка λ-матрицы

$P(\lambda) = [\lambda E - A; B]$, и, во-вторых, среди всех таких делителей многочлена (4) у $\varphi(\lambda)$ наибольшая степень. Следуя [3], такой многочлен $\varphi(\lambda)$ будем называть максимально инвариантым многочленом спектра рассматриваемых систем.

На основании [1–3] доказывается следующая

Теорема 1. *Если $n \times k$-матрица S составлена из $k = \operatorname{rank} H$ линейно независимых вектор-столбцов матрицы*

$$H = [B; AB; \ldots; A^{n-1}B], \tag{5}$$

то тогда

$$\varphi(\lambda) = C_0 \cdot \frac{\det(\lambda E - A)}{\det(S^T(\lambda E - A)S)},$$

где $C_0 = const \neq 0$, а «T» – символ транспонирования.

Следствие 1. *Степень максимально инвариантного многочлена равна дефекту матрицы (5), т.е. равна $(n - \operatorname{rank} H)$.*

Библиографические ссылки

1. *Булатов В.И.* Влияние обратной связи на спектр линейной системы // Вестник БГУ. Сер.I. 1977. № 1. С. 81–82.
2. *Булатов В.И.* Задачи модального управления // Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук, Минск, 1981.
3. *Булатов В.И.* Об одном способе вычисления максимально инвариантного многочлена спектра линейных стационарных систем управления // Тезисы докладов Международной научной конференции по дифференциальным уравнениям «Еругинские чтения-2017». Ч. I. Минск. С. 68–69.

ОПТИМАЛЬНЫЕ СФЕРИЧЕСКИЕ КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ

В.Л. Васкевич

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия
vask@math.nsc.ru

В докладе рассматриваются последовательности кубатурных формул на единичной сфере многомерного евклидова пространства [1, 2]. Множества узлов рассматриваемых кубатурных формул последовательно вкладываются друг в друга, образуя в пределе плотное на исходной сфере подмножество. В качестве области действия кубатурных формул, т.е. в качестве класса подынтегральных функций, выступают сферические пространства Соболева [2]. Допускается, что эти пространства могут иметь дробную гладкость. Доказано, что среди всевозможных сферических кубатурных формул с заданной совокупностью узлов существует и единственна формула с наименьшей нормой функционала погрешности — оптимальная [1]. Установлено, что веса оптимальной кубатурной формулы являются решением специальной невырожденной системы линейных уравнений. Доказано, что при неограниченном возрастании числа узлов нормы функционалов погрешности оптимальных кубатурных формул стремятся к нулю.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 19-01-00422.

Библиографические ссылки

1. *Соболев С.Л., Васкевич В.Л.* Кубатурные формулы. Новосибирск: Изд-во Института математики, 1996.
2. *Васкевич В.Л.* Погрешность, обусловленность и гарантированная точность многомерных сферических кубатур // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53. № 6. С. 1245–1262.

КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ УСТАНОВИВШИХСЯ РЕЖИМОВ ДВИЖЕНИЯ СТОПОХОДЯЩЕЙ МАШИНЫ С ВЕТРОПРИВОДОМ

М.А. Гарбуз, Л.А. Климина

НИИ механики МГУ, Москва, Россия
misha-garbuz@yandex.ru, klimina@imec.msu.ru

Введение. Рассматривается задача о движении стопоходящей машины Чебышева по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости. Система находится в горизонтальном стационарном потоке ветра. Машина снабжена ветроприёмной установкой, которая преобразует энергию ветра в энергию вращения и передаёт её рабочему валу стопоходящей машины. Другие источники энергии отсутствуют. Целевым режимом является режим, при котором корпус машины перемещается против ветра с постоянной средней скоростью. Построена математическая модель в форме динамической системы второго порядка, исследованы установившиеся режимы движения.

1. Описание системы. В основе стопоходящей машины Чебышёва лежит плоский трёхзвенный механизм, состоящий из кривошипа шатуна и рычага, преобразующий вращательное движение в приближённое к прямолинейному. Кинематическая схема получила название λ-механизм и послужила основой для создания «ноги» стопоходящей машины [1].

Рассматриваемая механическая система состоит из стопоходящей машины с четырьмя «ногами» и пропеллерной ветротурбины, установленной на корпусе машины, так что плоскость пропеллера ортогональна направлению движения корпуса. λ-механизмы расположены на корпусе попарно симметрично, при этом «ноги», находящиеся с одной стороны корпуса имеют общий кривошип (см. рис. 1). Вал турбины соединен с кривошипами λ-механизмов «ног» машины посредством редуктора с коэффициентом передачи n. Стопоходящая машина перемещается по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости и находится в потоке ветра, направленном параллельно линии движения корпуса.

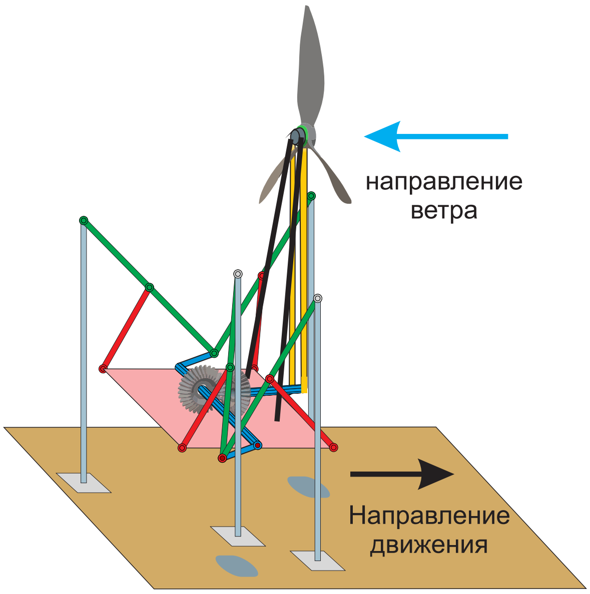


Рис. 1 — Стопоходящая машина с ветроприводом

Проведён анализ кинематики механизма и сделаны допущения, позволяющие считать, что система имеет одну степень свободы. Аэродинамическое воздействие на пропеллер и корпус описывается в рамках квазистатической модели взаимодействия со сплошной средой [2]. Уравнения движения системы составлены на основе формализма Лагранжа.

2. Основные результаты. На установившемся движении наблюдается баланс между обобщёнными силами, одна из которых соответствует аэродинамическому моменту, действующему на пропеллер, а другая — сумме лобового сопротивления пропеллера и корпуса.

За счет выбора коэффициента n передачи можно обеспечить желаемое соотношение между виртуальными перемещениями, соответствующими указанным обобщенным силам. Таким образом, было достигнуто существование установившегося режима, при котором корпус движется против ветра за счёт энергии ветра.

Работа выполнена в рамках НИР «Разработка методов исследования управляемых механических систем, взаимодействующих со сплошной средой» (АААА-А19-119012990123-0).

Библиографические ссылки

1. *Чебышев П.Л.* Избранные труды. М.: Изд-во Академии Наук СССР, 1955.
2. *Локшин Б.Я., Привалов В.А., Самсонов В.А.* Введение в задачу о движении тела в сопротивляющейся среде. М.: Изд-во МГУ, 1986, 86 с.

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ, ДВОЙСТВЕННОСТЬ, ШТРАФЫ, РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ И МЕТОД НЬЮТОНА

А.И. Голиков

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия
gol-a@yandex.ru

Задачи нахождения решения недоопределенной системы линейных уравнений с неотрицательными переменными или системы линейных неравенств не относятся к классическим задачам вычислительной линейной алгебры. Как правило, эти задачи имеют неединственное решение. Эти задачи сводятся к задачам оптимизации. Для решения таких задач полезно использовать теорию двойственности и различные методы оптимизации, например, метод Ньютона. Оптимизационные методы дают возможность выделять из множества решений линейной системы единственное решение (например, нормальное решение, проекцию заданной точки).

На примере задачи нахождения проекции заданной точки на множество решений системы линейных уравнений и/или неравенств показана связь между методом штрафной функции, методом регуляризации и двойственностью возникающих вспомогательных задач. Так, задачу $Ax = b, \quad x \geq 0_n$ — нахождение неотрицательного решения системы линейных уравнений, где матрица $A \in R^{m\times n}$, $m < n$, векторы $b \in R^m$, $x \in R^n$, полезно рассмотреть как задачу линейного программирования с нулевым вектором коэффициентов целевой функции:

$$P: \quad \min_{x\in X} \ 0_n^\top x, \quad X = \{x \in R^n \ : \ Ax = b, \quad x \geq 0_n\}.$$

Прямую задачу линейного программирования P можно преобразовать следующими двумя способами: 1) с помощью квадратичного штрафа (преобразование pen) снять ограничения, 2) используя квадратичную регуляризацию (преобразование reg) прийти к задаче с единственным решением. Можно продолжить преобразование полученных задач, применяя, соответственно, квадратичную регуляризацию и квадратичный штраф. Аналогично можно поступить с двойственной задачей D:

$$D: \quad \max_{u\in U} \ b^\top u, \quad U = \{u \in R^m \ : \ A^\top u \leq 0_n\}.$$

Приведенную связь оштрафованных и регуляризованных задач P и D можно представить в виде следующей схемы, где вертикальные стрелки означают взаимную двойственность:

$$\begin{tikzcd}
P_{pr} \arrow[d, leftrightarrow] & P_p \arrow[l, "reg"'] \arrow[d, leftrightarrow] & P \arrow[l, "pen"'] \arrow[r, "reg"] \arrow[d, leftrightarrow] & P_r \arrow[r, "pen"] \arrow[d, leftrightarrow] & P_{rp} \arrow[d, leftrightarrow] \\
D_{rp} & D_r \arrow[l, "pen"'] & D \arrow[l, "reg"'] \arrow[r, "pen"] & D_p \arrow[r, "reg"] & D_{pr}
\end{tikzcd}$$

Двойственные задачи D_p, D_{pr}, D_{rp} являются задачами безусловной максимизации вогнутых кусочно-квадратичных функций с числом переменных m меньшим, чем n, где n — число переменных соответствующих прямых задач. Их решения дают возможность по простым формулам вычислить решения соответствующих взаимно двойственных задач P_r, P_{rp}, P_{pr}.

В [1] применяется обобщенный метод Ньютона к задаче D_p

$$\min_{u\in R^m} H(u) = -b^\top u + \frac{1}{2}\|(\hat{x} + A^\top u)_+\|^2 \qquad (1)$$

для нахождения проекции x^* заданной точки $\hat{x}$ на множество неотрицательных решений линейной системы. По решению u^* задачи (1) легко вычисляется искомая проекция $x^* = (\hat{x} + A^\top u^*)_+$.

Так как $H(u)$ дифференцируема один раз, то используется обобщенная матрица Гессе вида $H_{uu}(u) = A\mathrm{Diag}\left(\mathrm{sign}(\hat{x} + A^\top u)_+\right) A^\top$.

На $k+1$ шаге метода Ньютона решается система $m \times m$ линейных уравнений с матрицей $H_{uu}(u) + \delta \mathrm{Diag}(AA^\top)$, где $0 \le \delta \ll 1$.

Установлена глобальная конечная сходимость метода Ньютона при соответствующем выборе длины шага спуска для безусловной оптимизации. Указана связь этого шага, выбора величины δ, метода сопряженного градиента решения системы линейных уравнений для определения направления спуска в методе Ньютона. Проведены численные эксперименты с трудными задачами из библиотеки NETLIB [1]. Эксперименты с задачами, сгенерироваными случайным образом, показали возможность с помощью системы MATLAB на персональном компьютере находить проекцию точки при m порядка 4 тыс. и n порядка нескольких миллионов за несколько минут. При решении случайным образом сгенерированных задач вместо $\mathrm{Diag}(AA^\top)$ к обобщенной матрице Гессе $H_{uu}(u)$ добавлялось выражение δI_m, где I_m — единичная матрица размерности m.

Библиографические ссылки

1. *Голиков А.И., Евтушенко Ю.Г., Капорин И.Е.* Метод ньютоновского типа для решения систем линейных уравнений и неравенств // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. 2019. Т. 59. № 12. С. 2086–2101.

ПОДВОДНЫЙ КАПСУЛЬНЫЙ РОБОТ, УПРАВЛЯЕМЫЙ ДВИЖЕНИЕМ ВНУТРЕННЕГО МАХОВИКА

С.А. Голованов, Л.А. Климина, М.З. Досаев, Ю.Д. Селюцкий

НИИ механики МГУ, Москва, Россия
klimina@imec.msu.ru

Введение. Капсульные роботы, перемещающиеся в жидкости при помощи движения внутренних масс, активно изучаются современными исследователями. Разрабатываются новые конструктивные решения и новые подходы к математическому моделированию таких устройств. Подробный обзор содержится в [1]. Среди основополагающих работ в данной области можно назвать, например [2–4]. Из последних результатов наиболее близки к задаче данной работы (по принципу перемещения робота) статьи [1, 5–7]. Существует много подходов к описанию взаимодействия капсульного робота с жидкостью. Активно используются уравнения Кирхгофа, Навье-Стокса, методы описания сходящих вихрей, учитывается влияние присоединенных масс, силы Архимеда.

В данной работе предложен подход к описанию сило-моментных воздействий на основе гипотезы квазистатического обтекания. Учитывается сила сопротивления, боковая сила, гидродинамический момент, действующие на корпус. Простота подхода позволяет провести детальный параметрический анализ системы. Более того, такой подход позволил выявить существенную роль боковой силы для *безреверсного* продвижения робота в заданном направлении.

1. Описание системы. Рассматривается робот, конструкция которого аналогична [5, 6]. При этом математическая модель радикально отличается, а также предложена новая стратегия управления. Робот совершает плоскопараллельное движение. Он состоит из жесткого корпуса (оболочки) в форме аэродинамического профиля и управляемого внутреннего сбалансированного маховика. Центр маховика совпадает с центром масс профиля и с точкой приложения силы Архимеда. Уравнения движения составлены в форме динамической системы пятого порядка на основе гипотезы квазистатического обтекания.

Программным является движение, при котором корпус движется “галсами” так, что скорость v_x вдоль магистрального направления изменяется по периодическому закону, оставаясь положительной. При этом скорость v_y вдоль нормали к целевому направлению движения, а также угол φ отклонения корпуса от этого направления и угловая скорость ω корпуса – периодические функции с нулевым средним.

2. Закон управления. Результаты. Предложен закон управления по обратной связи следующего вида $U = -a\,\mathrm{signum}(\omega) + b\varphi + c\omega$. Здесь U – момент, приложенный к внутреннему маховику со стороны двигателя, a, b, c – положительные параметры.

Путем прямого численного интегрирования уравнений движения при различных значениях параметров и начальных условий подобраны коэффициенты в законе управления, обеспечивающие переход системы на программный режим. Показано, что ключевую роль в поддержании программного движения играет компонента гидродинамической силы, ортогональная скорости центра масс. Она обеспечивает безреверсное продвижение в жидкости. Таким образом, перспективным представляется разработка схем движения капсульных роботов, основанных на использовании боковой силы.

Собран и протестирован макет робота. Получено качественное соответствие результатов тестирования с результатами математического моделирования, что подтверждает эффективность применения квазистатической теории для ряда задач динамики капсульных роботов.

Работа выполнена в рамках НИР «Разработка методов исследования управляемых механических систем, взаимодействующих со сплошной средой» (АААА-А19-119012990123-0).

Библиографические ссылки

1. *Килин А.А., Кленов А.И., Тененев В.А.* Управление движением тела с помощью внутренних масс в вязкой жидкости // Компьютерные исследования и моделирование. 2018. Т. 10. № 4. С. 445–460.
2. *Козлов В.В., Рамоданов С.М.* О движении в идеальной жидкости тела с жесткой оболочкой и меняющейся геометрией масс // Докл. РАН. 2002. Т. 382. № 4. С. 478–481.
3. *Черноусько Ф.Л.* Оптимальные периодические движения двухмассовой системы в сопротивляющейся среде // ПММ. 2008. Т. 72. № 2. С. 202–215.
4. *Childress S., Spagnolie S.E., Tokieda T.* A bug on a raft: recoil locomotion in a viscous fluid // J. of fluid mechanics. 2011. Vol. 669. P. 527–556.
5. *Pollard B., Tallapragada P.* An aquatic robot propelled by an internal rotor // IEEE/ASME Transactions on Mechatronics. 2016. Vol. 22. No. 2. P. 931–939.
6. *Tallapragada P., Kelly S.D.* Self-propulsion of free solid bodies with internal rotors via localized singular vortex shedding in planar ideal fluids // The European Physical J. Special Topics. 2015. Vol. 224. No. 17. P. 3185–3197.
7. *Kelly S.D., Hukkeri R.B.* Mechanics, dynamics, and control of a single-input aquatic vehicle with variable coefficient of lift // IEEE transactions on robotics. 2006. Vol. 22. No. 6. P. 1254–1264.

ПРОИЗВОДНЫЕ ПО НАПРАВЛЕНИЯМ ФУНКЦИОНАЛА ЦЕНЫ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМАМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

М.И. Гомоюнов

ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия
m.i.gomoyunov@gmail.com

В рамках подхода [1 – 4] для динамической системы

$$({}^{C}D^{\alpha}x)(t) = f(t, x(t), u(t)), \;\; x(t) \in \mathbb{R}^n, \;\; u(t) \in P \subset \mathbb{R}^r, \;\; t \in [0, T], \quad (1)$$

при начальном условии $x(0) = x_0$ рассматривается задача оптимального управления на минимум показателя качества

$$\gamma = \sigma(x(T)). \quad (2)$$

Здесь t — время, $x(t)$ — состояние системы в момент времени t, $({}^{C}D^{\alpha}x)(t)$ — дробная производная Капуто (см., например, [5]) порядка

$\alpha \in (0, 1)$, $u(t)$ — текущее управляющее воздействие, P — компактное множество, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ — начальное состояние системы. Предполагается, что функция $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times P \to \mathbb{R}^n$ непрерывна и удовлетворяет по второй переменной условиям локальной липшицевости и подлинейного роста, функция $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ локально липшицева.

Цена (величина оптимального результата) в задаче (1), (2) является [6] функционалом $\rho : G^\alpha \to \mathbb{R}$ на подходящем пространстве G^α позиций $(t, w(\cdot))$ системы (1), где $t \in [0, T]$, а функция $w : [0, t] \to \mathbb{R}^n$ играет роль истории движения этой системы на отрезке времени $[0, t]$. В тех случаях, когда этот функционал удовлетворяет определённым условиям гладкости (является коинвариантно (ci-) гладким порядка α), он однозначно описывается при помощи соответствующего уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана с ci-производными порядка α. При этом оптимальная позиционная стратегия управления может быть построена экстремальным прицеливанием в направлении ci-градиента порядка α функционала цены. Однако, как правило, функционал цены в задаче (1), (2) гладким не является, и для описания его инфинитезимальных свойств и построения оптимальных стратегий управления требуется привлекать аппарат негладкого анализа.

В работе для функционалов $\varphi : G^\alpha \to \mathbb{R}$ введены понятия нижних и верхних производных порядка α по направлениям. Эти производные представляют собой модификацию соответствующих конструкций из [1, 2], учитывающую специфику систем дробного порядка. В терминах таких производных получена пара дифференциальных неравенств, характеризующих функционал цены в задаче (1), (2) в общем негладком случае. Дана конкретизация этих неравенств для кусочно ci-гладких порядка α функционалов, а также для огибающих семейств ci-гладких порядка α функционалов.

При дополнительных предположениях о том, что функция f непрерывно дифференцируема по первым двум переменным, вектограмма $f(t, x, P)$ выпукла при всех $t \in [0, T]$ и $x \in \mathbb{R}^n$, и функция σ непрерывно дифференцируема, по схеме из [3, 4] доказано, что функционал цены в задаче (1), (2) является дифференцируемым порядка α по направлениям, и пара полученных дифференциальных неравенств обращается в одно равенство, естественным образом обобщающее уравнение Гамильтона — Якоби — Беллмана на негладкий случай. На этой основе для построения оптимальной позиционной стратегии управления в задаче (1), (2) предложена соответствующая негладкая конструкция экстремального прицеливания [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, проект 19-11-00105.

Библиографические ссылки

1. *Krasovskii N.N., Subbotin A.I.* Game-theoretical control problems. New York: Springer, 1988.
2. *Лукоянов Н.Ю.* Функциональные уравнения Гамильтона — Якоби и задачи управления с наследственной информацией. Екатеринбург: Изд-во УрФУ, 2011.
3. *Субботина Н.Н., Колпакова Е.А., Токманцев Т.Б., Шагалова Л.Г.* Метод характеристик для уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана. Екатеринбург: РИО УрО РАН, 2013.
4. *Субботин А.И., Субботина Н.Н.* К вопросу обоснования метода динамического программирования в задаче оптимального управления // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. № 2. С. 24–32.
5. *Diethelm K.* The analysis of fractional differential equations. Berlin: Springer, 2010.
6. *Gomoyunov M.I.* Dynamic programming principle and Hamilton — Jacobi — Bellman equations for fractional-order systems // SIAM J. Control Optim. 2020. Vol. 58. Issue 6. P. 3185–3211.

ПОСТРОЕНИЕ МНОЖЕСТВА УПРАВЛЯЕМОСТИ ДЛЯ ОДНОГО ОБЪЕКТА ПРИ НАЛИЧИИ ФАЗОВОГО ОГРАНИЧЕНИЯ

М.Н. Гончарова

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы,

Гродно, Беларусь

m.gonchar@grsu.by

Рассмотрим управляемый объект, поведение которого описывается дифференциальным уравнением второго порядка

$$\ddot{x} = u, \tag{1}$$

где $x = x(t)$ — переменная состояния объекта, на управление u наложено ограничение $u \in [-\epsilon_1; \epsilon_2]$, $\epsilon_1 > 0, \epsilon_2 > 0$, и для всех моментов времени t должно выполняться фазовое ограничение $\dot{x}(t) \leq d$.

Построим множество управляемости $Y(\tau)$ этого объекта в начало координат, то есть множество всех точек фазового пространства, из которых можно перейти на отрезке времени длины τ в начало координат при всевозможных допустимых управлениях и выполнении фазового ограничения.

С помощью замены $x = x_1, \dot{x} = x_2$ уравнение (1) сведем к нормальной системе дифференциальных уравнений и, используя алгоритм, представленный в книге [1], построим множество управляемости в начало координат в случае, когда фазовое ограничение не является существенным. Получим, что при выполнении неравенства $\tau \leq d$ множество управляемости $Y(\tau)$ будет множеством, ограниченным двумя параболами

$$x_1 = -\frac{\tau^2\epsilon_1}{2} + \frac{1}{2(\epsilon_1+\epsilon_2)}(x_2 - \epsilon_1\tau)^2$$

и

$$x_1 = \frac{\tau^2\epsilon_2}{2} - \frac{1}{2(\epsilon_1+\epsilon_2)}(x_2 + \epsilon_2\tau)^2.$$

Пусть теперь требуется построить множество управляемости для таких моментов времени, когда выполняется неравенство $\tau > d$. В этом случае фазовое ограничение оказывает существенное влияние на решение задачи. Для достижения поставленной цели сначала построим множество управляемости при $\tau = d$, то есть множество $Y(d)$. Далее множество $Y(d)$ представим в виде разбиения на отрезки, параллельные оси Ox_1, построим множества управляемости в концы этих отрезков, и затем проведем объединение построенных множеств. В результате получим искомое множество управляемости. Оно будет ограничено тремя параболами

$$x_1 = -\frac{d^2\epsilon_1}{2} - (\tau - d)\epsilon_1 d + \frac{1}{2}(x_2 - \epsilon_1 d)^2, \qquad (2)$$

$$x_1 = -\frac{\tau^2\epsilon_1}{2} + \frac{1}{2(\epsilon_1+\epsilon_2)}(x_2 - \epsilon_1\tau)^2, \qquad (3)$$

$$x_1 = \frac{\tau^2\epsilon_2}{2} - \frac{1}{2(\epsilon_1+\epsilon_2)}(x_2 + \epsilon_2\tau)^2$$

и прямой $x_2 = d$. Отметим, что в точке пересечения парабол (2) и (3) сохраняется гладкость границы множества $Y(\tau)$.

Аналитическое задание множества управляемости позволяет провести достаточно подробный анализ поведения объекта.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь (ГПНИ "Конвергенция-2025 задание 1.2.04.4).

Библиографические ссылки

1. *Благодатских В.И.* Введение в оптимальное управление. М.: Высш. шк., 2001.

ОДИН ПОДХОД В СТАБИЛИЗАЦИИ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

В.В. Горячкин, В.В. Крахотко

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
krakhotko@bsu.by

Рассмотрим линейную стационарную систему

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t),\ x(0) = x_0, u(t) = Cx(t),\ t = 0, 1, 2, \ldots, \quad (1)$$

где x, $x_0 \in R^n$, $u \in R^r$, A, B и C — постоянные матрицы.

Замкнем систему (1) обратной связью. Известно [1], что система (1) стабилизируема тогда и только тогда, когда замкнутая система

$$x(t+1) = (A + BC)x(t)$$

асимптотически устойчива при любом начальном состоянии x_0. Спектральный критерий асимптотической устойчивости замкнутой системы имеет вид $\rho(A + BC) < 1$. Таким образом, решение задачи стабилизации сводится к построению матрицы C, при которой выполняется неравенство со спектральным радиусом.

Далее предлагается процедура вычисления матриц обратной связи, устанавливается критерий стабилизации, который при данном выборе матриц обратной связи явно зависит от исходных параметров системы.

Для системы (1) будем искать управление $u(t, x)$: $R^n \to R^r$, такое, чтобы последовательность векторов $x(t)$, задаваемая рекуррентным уравнением

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t, x(\tau)), \quad (2)$$

$$t = \tau, \tau + 1, \ldots, \tau + l - 1,\ \tau = 0, l, 2l, 3l, \ldots,\ l \geq 1,$$

сходилась к точке покоя $x = 0$ для любых начальных векторов x_0.

Целое число l и обратную связь по управлению строим, исходя их следующих рассуждений. Положим $D_i = A^i B,\ i = \overline{0, n-1}$. Столбцы матричных блоков $D_i,\ i = \overline{0, n-1}$, составляют матрицу управляемости D. Пусть $l,\ 1 \leq l \leq n,$ — минимальное число блоков D_i, на которых матрица управляемости $D = D(l)$ имеет максимальный ранг $p \leq n$.

Зафиксируем любое τ из множества $\{0, l, 2l, 3l, \ldots\}$. Далее строим управления $u(\tau)$ следующим образом:

$$\begin{array}{c} u(\tau) = C_0 A^l x(\tau), \\ u(\tau+1) = C_1 A^l x(\tau), \\ ----------------- \\ u(\tau+l-1) = C_{l-1} A^l x(\tau), \end{array} \quad \tau = 0, l, 2l, 3l, \ldots, \tag{3}$$

где матрицы $C_i,\ i = \overline{0, l-1}$ подлежат определению. Обозначим $y(t) = (x(tl-l+1), x(tl-l+2), x(tl-l+3), \cdots, x(tl))^T,\ t = 1, 2, \ldots$, $y_0 = (x_0, x_0, x_0, \cdots, x_0,)^T$,

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ A & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & A & 0 \end{pmatrix}, \ \tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & A + BC_0A^l \\ 0 & \ldots & 0 & BC_1A^l \\ 0 & \ldots & 0 & BC_2A^l \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots.\ldots \\ 0 & \ldots & 0 & BC_{l-1}A^l \end{pmatrix}.$$

В этих обозначениях замыкание системы (2) управлением (3) примет вид

$$(E - \tilde{A})y(t+1) = \tilde{B}y(t),\ y(0) = y_0. \tag{4}$$

Известно [1, 2], что система (4) асимптотически устойчива при любом начальном состоянии y_0 тогда и только тогда, когда все корни характеристического уравнения $\det((E - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} - \lambda E) = 0$ по модулю меньше единицы. Этот результат можно представить в другой форме, а именно, в терминах матриц $A, B, C_0, C_1, \ldots, C_{l-1}$. Справедлива

Теорема 1. *Система (4) асимптотически устойчива при любом начальном условии y_0 тогда и только тогда, когда выполняется неравенство*

$$\rho((E - D(l)Q(l))A^l) < 1, \tag{5}$$

где здесь и далее $Q(l) = \begin{pmatrix} -C_0 \\ \cdots \\ -C_{l-1} \end{pmatrix}$, $D(l) = (D_i, i = l-1, l-2, \ldots, 0)$.

Ясно, что свойства асимптотической устойчивости системы (4) и стабилизации системы (2) при одних и тех же матрицах $C_0, C_1, \ldots, C_{l-1}$ эквивалентны.

Библиографические ссылки

1. *Леонов Г.А., Шумаров М.М.* Методы стабилизации линейных управляемых систем. — СПб.,2005.
2. *Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И.* Вычислительные методы высшей математики. Т. 1. Мн.: "Вышэйшая школа", 1972.

РЕГУЛЯРИЗИРОВАННАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПО НЕТОЧНЫМ ДАННЫМ

В.Ф. Губарев

Институт космических исследований НАН Украины и ГКА Украины,

Киев, Украина

v.f.gubarev@gmail.com

Введение. В большинстве существующих методов управления динамическими системами предполагается, что математическая модель известна. Тогда основное внимание теории управления связано с задачами анализа и синтеза. Чтобы методы синтеза обеспечивали желаемый результат управления, модель должна адекватно описывать реальные процессы. Допускается небольшая неопределенность описания, как правило, связанная с шумами на выходе и наличием возмущений на входе. Чаще всего стохастический подход используется для их интерпретации, что позволяет решать задачи управления в рамках детерминированного описания. Одним из методов построения модели является идентификация. Методы стохастической идентификации, ориентированные на нахождение моделей с несмещенными оценками параметров, на практике оказались неэффективными. Они работают в достаточно простых случаях с хорошими структурными свойствами системы и погрешностях типа белого шума. В других случаях задачи идентификации становятся некорректно поставленными. В результате находятся приближенные регуляризированные решения, в которых структурные свойства модели и системы могут существенно отличаться. Очевидно, что это потребует адаптации существующих методов управления или создания принципиально новых ориентированных на такой класс моделей. В определенных случаях могут быть использованы методы, развиваемые академиками А.Б. Куржанским и В.М. Кунцевичем, основанные на гарантированном подходе с множественным представлением моделей. Перспективными представляются также методы управления на основе моделей предсказания, в англоязычной литературе известные как MPC (“model predictive control”). В данной работе описываются методы идентификации сложных динамических систем с использованием процедур регуляризации, что позволяет находить приближенные регуляризированные решения и в тех случаях, когда задачи идентификации становятся некорректно поставленными.

Метод идентификации с регуляризацией. Поскольку в результате идентификации по неточным данным получим приближенное описание, то возьмем разностную систему уравнений в пространстве состояний, как класс моделей

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \qquad y_k = Cx_k, \tag{1}$$

где x_k, u_k, y_k — вектора состояния, входа и выхода системы, а A, B, C — соответствующие матрицы.

Тогда задача идентификации состоит в нахождении размерности модели n и матриц A, B, C по исходным данным $\{u_t,\ y_t\}$ на некотором достаточно большом временном интервале $t \in [0,\ T]$. Решение ее будем находить, используя модифицированную формулу Коши, связывающую входные и выходные переменные для дискретного аналога (1)

$$y(t,k) = \Gamma_{t-1} \cdot x_k + \Phi_{t-2} \cdot u(t,k), \tag{2}$$

где

$$y(t,k) = \begin{bmatrix} y'_k \\ y'_{k+1} \\ \vdots \\ y'_{k+t-1} \end{bmatrix}, x_k = \begin{bmatrix} x_{k_1} \\ x_{k_2} \\ \vdots \\ x_{k_n} \end{bmatrix}, \Gamma_{t-1} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{t-1} \end{bmatrix},$$

$$u(t,k) = \begin{bmatrix} u'_k \\ u'_{k+1} \\ \vdots \\ u'_{k+t-1} \end{bmatrix}, \Phi_{t-2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ CB & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ CA^{t-2}B & CA^{t-3}B & \dots & CB & 0 \end{bmatrix},$$

«’» — операция транспонирования.

В предлагаемом методе идентификации данные берутся из активного эксперимента, в котором чередуются интервалы возбуждения с интервалами релаксации, на которых $u_t = 0$. Возбуждение осуществляется варьируемым гармоническим сигналом и прямоугольными импульсами разной длительности. Из последовательностей $y(t)$ на интервалах релаксации формируется специальная матрица, которая используется для нахождения размерности модели n и матриц A и C. Матрица B находится из (2) с учетом того, что известны Γ_{t-1} и x_k.

В рассматриваемом методе размерность модели является параметром регуляризации, который находится из принципа невязки или специальной процедурой определения квазиоптимального n.

АСИМПТОТИКА МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ НА МАЛЫХ ПРОМЕЖУТКАХ ВРЕМЕНИ

М.И. Гусев, И.О. Осипов

Институт математики и механики УрО РАН им. Н.Н. Красовского,

Екатеринбург, Россия

{gmi, i.o.osipov}@imm.uran.ru

Введение. В докладе исследуется асимптотическое поведение множеств достижимости нелинейных управляемых систем с интегральными квадратичными ограничениями на управление на малых промежутках времени. Приводится достаточное условие асимптотической эквивалентности множеств достижимости нелинейной и линеаризованной систем при стремлении к нулю длины промежутка времени [1]. Понятие асимптотической эквивалентности множеств определяется следующим образом [2]. Пусть выпуклые компактные множества $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ таковы, что нулевой вектор является внутренней точкой каждого из них. Расстоянием Банаха-Мазура $\rho(X, Y)$ между X и Y называется величина $\rho(X,Y) := \log(r(X,Y) \cdot r(Y,X))$, где $r(X,Y) = \inf\{t \geq 1 : tX \supset Y\}$. Множества $X(\varepsilon), Y(\varepsilon)$ называются асимптотически эквивалентными, если $\rho(X(\varepsilon), Y(\varepsilon)) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

1. Множества достижимости на малых промежутках времени. Исследуются множества достижимости аффинных по управлению систем на интервале времени $t_0 \leq t \leq t_0 + \bar{\varepsilon}$

$$\dot{x}(t) = f_1(t, x(t)) + f_2(t, x(t))u(t), \quad y(t) = Cx(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (1)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^r$, $y \in \mathbb{R}^m (m \leqslant n)$, $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ – матрица полного ранга, $m \leq n$, $\bar{\varepsilon}$ — некоторое фиксированное положительное число, а функции $f_1 : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$, $f_2 : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n\times r}$ предполагаются непрерывными и непрерывно-дифференцируемыми по x.

Под $\mathbb{L}_2 = \mathbb{L}_2[t_0, t_0+\varepsilon]$ будем понимать гильбертово пространство интегрируемых с квадратом функций, а $B_{\mathbb{L}_2}(0,\mu_0)$ — шар радиуса μ_0 в $\mathbb{L}_2$.

Обозначим $G_y(\varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^m : \exists u(\cdot) \in B_{\mathbb{L}_2}(0,\mu),\ \ y = Cx(t_0 + \varepsilon, x^0, u(\cdot))\}$ множество достижимости системы (1) по выходу y. В частности, $G_y(\varepsilon)$ может быть проекцией множества достижимости по состоянию на координатные плоскости.

Линеаризованную вдоль порождённой управлением $u \equiv 0$ траектории $x(t,0)$ систему (1) после замены времени $t = \varepsilon\tau + t_0$ представим в виде

$$\delta\dot{z} = \varepsilon A(\varepsilon\tau + t_0)\delta z(\tau) + B(\varepsilon\tau + t_0)v(t), \quad 0 \leqslant \tau \leqslant 1, \quad \delta z(0) = 0. \quad (2)$$

Через $\widehat{G}_y(\varepsilon)$ будем обозначать множество достижимости системы (2) по выходу в момент $\tau = 1$, порожденное управлениями $\nu(\cdot) \in B_{\mathbb{L}_2}(0,\mu\sqrt{\varepsilon})$. Множество $\widehat{G}_y(\varepsilon)$ — эллиписоид в $\mathbb{R}^m$.

Введем отображение $H'_\varepsilon : \mathbb{L}_2[0,1] \to \mathbb{R}^m$, $H'_\varepsilon(\delta v(\cdot))\delta\nu = C\delta z(1, v(\cdot))$. H'_ε – липшицево, с константой $L(\varepsilon)$. Обозначим через W_ε грамиан управляемости системы (2), а через $\nu^y(\varepsilon)$ — минимальное собственное число матрицы $CW_\varepsilon C^\top$.

Теорема 1. *Если линеаризованная система* (1) *вполне управляема по выходу* $\delta y = C\delta z$ *и* $L^2(\varepsilon)\varepsilon/\nu^y(\varepsilon) \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$, *то при достаточно малых* ε *множество* $G_y(\varepsilon) - Cx(t_0+\varepsilon, 0)$ *выпукло и асимптотически эквивалентно множеству* $\widehat{G}_y(\varepsilon)$.

2. Пример. Асимптотика множеств достижимости изучена на примере системы четвёртого порядка:

$$\dot{x}_1 = x_3^2 - x_4^2, \qquad \dot{x}_2 = 2x_3x_4, \qquad \dot{x}_3 = -0.5x_4u, \qquad \dot{x}_4 = 0.5x_3u$$

с начальным состоянием $x_1(0) = x_2(0) = x_4(0) = 0$, $x_3(0) = 1$ и ограничениями на управление $\int_0^1 (u(t)-1)^2\ dt \leqslant 1$.

Изучаются проекции множества достижимости на плоскости второй-третьей и второй-четвёртой координат состояния. В первом случае условия теоремы 1 не выполняются; численное моделирование показывает невыпуклость этой проекции при малых временных промежутках. Во втором случае условия теоремы выполняются и соответствующие множества асимптотически эквиваленты, что подтверждается результатами численного моделирования.

Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Минобрнауки России.

Библиографические ссылки

1. *Gusev M.I., Osipov I.O.* Asymptotic behavior of reachable sets on small time intervals. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2020. Vol. 309, suppl.1. P. S52–S64.
2. *Goncharova E., Ovseevich A.* Small-time reachable sets of linear systems with integral control constraints: birth of the shape of a reachable set// Journal of Optimization Theory and Applications. 2016. Vol. 168 (2). P. 615–624.

ПАДЕ РЕГУЛЯТОР В СЛАБО НЕЛИНЕЙНОЙ ДИСКРЕТНОЙ SDC СИСТЕМЕ НА КОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ С МАЛЫМ ШАГОМ

Ю.Э. Даник, М.Г. Дмитриев

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, Москва, Россия

Московский физико-технический институт (государственный университет), Долгопрудный, Россия

yuliadanik@gmail.com, mdmitriev@mail.ru

Введение. Для класса дискретных слабо нелинейных систем управления с коэффициентами, зависящими от состояния (SDC), на конечном интервале с малым шагом строится субоптимальный синтез на основе подхода SDRE, а также асимптотики метода пограничных функций по малому шагу. Конструируется одноточечная матричная Паде аппроксимация (ПА) решения начальной сингулярно возмущенной задачи для дискретного матричного уравнения Риккати. Численные эксперименты иллюстрируют экстраполяционные свойства построенного регулятора для более широкого диапазона изменения величины шага.

1. Постановка задачи. Рассмотрим дискретную вариационную задачу с возмущенными коэффициентами

$$x(t+\varepsilon) = A(x,\varepsilon)x + B(x,\varepsilon)u,\ x(0) = x^0, t \in [0,T],$$

$$J = \frac{1}{2}x'(T)Fx(T) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}(x'(k\varepsilon)Q(x,\varepsilon)x(k\varepsilon) + u'(k\varepsilon)Ru(k\varepsilon)),$$

$$x(t) \in X \in R^n,\ u \in R^r,\ t = k\varepsilon, k = 0,1,2.., N-1, T = N\varepsilon,$$

где $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$, $A(x,\varepsilon) = A_0 + \varepsilon A_1(x)$, $B(x,\varepsilon) = B_0 + \varepsilon B_1(x)$, а малый параметр $\varepsilon > 0$ равен длине шага и множителю при нелинейностях, A_0,B_0 — постоянные матрицы, A_0, $A_1(x) \in R^{n\times n}$, B_0, $B_1(x) \in R^{n\times r}$, X — некоторая ограниченная область пространства состояний, матрицы $Q(x,\varepsilon) = Q_0 + \varepsilon Q_1(x) > 0\ \forall x \in X$, ε, $R > 0$, Q_0, R — постоянные матрицы, $Q_0 > 0$, $Q_1(x) > 0$, $F > 0$.

2. Построение субоптимальной обратной связи. Для построения регулятора здесь используются необходимые условия оптимальности и соответствующее разностное дискретное уравнение Риккати, включающее дополнительное слагаемое $\varepsilon\,\Omega(P(x,t+\varepsilon),x,t+\varepsilon)$ [1] в правой части, содержащие производные матриц системы и критерия по вектору состояния

$$\begin{aligned}
&-P(x,t,\varepsilon) + A'(x,\varepsilon)P(x,t+\varepsilon,\varepsilon)A(x,\varepsilon) - A'(x,\varepsilon)\times\\
&\times P(x,t+\varepsilon,\varepsilon)B(x,\varepsilon)[R + B'(x,\varepsilon)P(x,t+\varepsilon,\varepsilon)B(x,\varepsilon)]^{-1}\times\\
&\times B'(x,\varepsilon)P(x,t+\varepsilon,\varepsilon)A(x,\varepsilon) + Q(x,\varepsilon)+\\
&+\varepsilon\,\Omega(P(x,t+\varepsilon),x,t+\varepsilon) = 0,\ \ P(x,T,\varepsilon) = F.
\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь методом пограничных функций Васильевой А.Б. [2], как и в [3] строится равномерное асимптотическое приближение второго порядка решения задачи (1), в обратном времени в виде суммы двух рядов $P(x,t,\varepsilon) = \bar{P}_2(x,t,\varepsilon) + \Pi_2 P(x,\tau,\varepsilon)$, $\tau = (t-T)/\varepsilon = -1,-2,..,-N$, $N = T/\varepsilon$. Для определения членов рядов получаем более простые уравнения: дискретное алгебраическое уравнение Риккати и дискретные уравнения Ляпунова. Так как свободный член уравнения Ляпунова может оказаться несимметричной матрицей, вводится операция симметризации. Используя асимптотику, для регулятора строится одноточечная матричная ПА [1/2] для матрицы коэффициентов усиления вида $PA_{[1/2]}(x,t,\tau,\varepsilon) = (\mathrm{M}_0(x) + \varepsilon\mathrm{M}_1(x) + M_0(x,\tau) + \varepsilon M_1(x,\tau))\times \times(E + \varepsilon\,\mathrm{N}_1(x) + \varepsilon^2\mathrm{N}_2(x))^{-1}$ [4, 5]. Оптимизированный регулятор на каркасе Паде аппроксимации превосходит по критерию оптимальности алгоритмы управления D-SDRE [1] и асимптотическое приближение на большем интервале изменения шага.

Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект № 21-11-00202).

Библиографические ссылки

1. *Dutka A.S., Ordys A.W., Grimble M.J.* Optimized discrete-time state dependent Riccati equation regulator // Proceedings of the American Control Conference. 2005. P. 2293–2298.

2. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.
3. *Глизер В.Я., Дмитриев М.Г.* Асимптотика решения некоторых дискретных задач оптимального управления с малым шагом // Дифференциальные уравнения. 1979. Т. 15. № 9. С. 1681–1691.
4. *Danik Yu.E., Dmitriev M.G.* The construction of stabilizing regulators sets for nonlinear control systems with the help of Padé approximations. Nonlinear Dynamics of Discrete and Continuous Systems. Switzerland: Springer, 2021. P. 45–62.
5. *Danik Yu.E., Dmitriev M.G.* Construction of Parametric Regulators for Nonlinear Control Systems Based on the Pade Approximations of the Matrix Riccati Equation Solution // IFAC-Papers OnLine, CAO18. 2018. Vol. 51. P. 815–820.

ПРИЗНАК РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ АСИНХРОННЫМ СПЕКТРОМ ЛИНЕЙНЫХ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ДИАГОНАЛЬНЫМ УСРЕДНЕНИЕМ МАТРИЦЫ КОЭФФИЦИЕНТОВ

А.К. Деменчук

Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь
demenchuk@im.bas-net.by

В 1955 г. Я. Курцвейль и О. Вейвода показали [1], что разрешенная относительно производной система обыкновенных дифференциальных почти периодических уравнений может допускать такие решения, что пересечение частотного модуля решения и модуля частот правой части системы является тривиальным. Впоследствии такого рода решения были названы сильно нерегулярными, их частотный спектр – асинхронным, а описываемые ими колебания – асинхронными [2]. Периодический случай, в котором нерегулярность означает несоизмеримость частот решения и системы, изучал Х. Массера [3].

Определение 1. *Модулем (частотным модулем)* $\mathrm{Mod}\,(F)$ *почти периодической матрицы* $F(t)$) *называется наименьшая аддитивная группа вещественных чисел, содержащая все показатели Фурье этой матрицы.*

Будем говорить, что некоторые столбцы матрицы $F(t)$ линейно независимы над $\mathbb{R}$, если их линейные комбинации с вещественными коэффициентами тождественно равны нулю тогда и только тогда, когда все коэффициенты нулевые. Через $\mathrm{rank}_{\mathrm{col}}\, P$ обозначим столбцовый ранг матрицы $P(t)$, т.е. наибольшее число ее линейно независимых над

$\mathbb{R}$ столбцов. Отметим, что вообще говоря, столбцовый ранг матрицы не совпадает с наибольшим числом ее линейно независимых строк.

Рассмотрим линейную систему управления

$$\dot{x} = A(t)x + Bu, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad n \geq 2, \tag{1}$$

где $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$– фазовый вектор, $u = u(t) \in \mathbb{R}^n$– вход, $A(t)$– непрерывная почти периодическая $n \times n$-матрица с модулем частот $\operatorname{Mod}(A)$, B– постоянная $n \times n$-матрица. Предположим, что управление задается в виде обратной связи, линейной по фазовым переменным

$$u = U(t)x \tag{2}$$

с непрерывной почти периодической $n \times n$-матрицей $U(t)$, $\operatorname{Mod}(U) \subseteq \operatorname{Mod}(A)$.

Задача выбора коэффициента обратной связи $U(t)$ из указанного допустимого множества таким, чтобы замкнутая управлением (2) система

$$\dot{x} = (A(t) + BU(t))x \tag{3}$$

имела сильно нерегулярное почти периодическое решение, спектр частот которого содержит заданное подмножество L, называется *задачей управления асинхронным спектром системы (1) с целевым множеством* L.

Пусть матрицы B вырождена и её ранг равен r, $1 \leq r < n$. Без потери общности рассуждений можно считать, что первые $n-r$ строк матрицы B нулевые, т.к. в противном случае этого можно добиться линейным невырожденным стационарным преобразованием фазовых переменных. Обозначим через $A_{12}(t)$ – правый верхний блок размерности $(n-r) \times r$ матрицы коэффициентов $A(t)$.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия:*

1) матрица B при управлении вырождена и имеет описанный выше вид;

2) среднее значение матрицы коэффициентов $A(t)$ является диагональной матрицей;

3) матрица $A_{12}(t)$ имеет неполный столбцовый ранг, равный r_1;

4) справедлива оценка $|L| \leq [(r - r_1)/2]$.

Тогда задача управления асинхронным спектром системы (1) с целевым множеством L разрешима.

Исследования выполнены при поддержке БРФФИ (проект № Ф20Р - 005 "Задачи управления по первому приближению для нестационарных систем в условиях неопределенности").

Библиографические ссылки

1. *Курцвейль Я., Вейвода О.* О периодических и почти периодических решениях систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Чехосл. матем. журнал. 1955. Т. 5, № 3. С. 362 – 370.
2. *Деменчук А.* Асинхронные колебания в дифференциальных системах. Условия существования и управление. Saarbrucken, 2012.
3. *Massera J.L.* Observaciones sobre les soluciones periodicas de ecuaciones diferenciales // Bol. de la Facultad de Ingenieria Montevideo. 1950. Vol. 4. No. 1. P. 37–45.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ЛИНЕЙНЫХ ЧЛЕНАХ

Г.В. Демиденко

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия
`demidenk@math.nsc.ru`

В работе рассматриваются системы дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t,x), \quad t > 0, \tag{1}$$

где $A(t)$ — непрерывная T-периодическая матрица размера $n \times n$, $f(t,x)$ — непрерывная вектор-функция, удовлетворяющая условию Липшица по x. Будем предполагать, что линейная система экспоненциально дихотомична (см., например, [1, 2]).

В работе [3] был установлен критерий экспоненциальной дихотомии системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. А именно, если $Q(t) \in C[0,T]$ — эрмитова матрица, удовлетворяющая условию

$$\int_0^T Q(s)ds > 0,$$

и $X(T)$ — матрица монодромии (1), то экспоненциальная дихотомия системы (1) эквивалентна существованию эрмитовой матрицы $H(t)$ и матрицы P, являющихся решением задачи

$$
\begin{cases}
\dfrac{d}{dt}H + HA(t) + A^*(t)H = -\left(X^{-1}(t)\right)^* P^*Q(t)PX^{-1}(t) \\
+(X^{-1}(t))^*(I-P)^*Q(t)(I-P)X^{-1}(t), \quad 0 < t < T, \\
H(0) = H(T) > 0, \\
H(0) = P^*H(0)P + (I-P)^*H(0)(I-P), \\
P^2 = P, \quad PX(T) = X(T)P.
\end{cases}
$$

Отметим, что этот критерий является аналогом соответствующих утверждений о задаче дихотомии для систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (см., например, [1, 4]).

Используя этот критерий экспоненциальной дихотомии, мы получаем оценки параметров дихотомии, доказываем аналог теорем о возмущении [5, 6] для экспоненциальной дихотомии, устанавливаем условия существования периодических решений нелинейных систем (1), а также их устойчивость.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 18-29-10086).

Библиографические ссылки

1. *Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.
2. *Массера Х., Шехтер Х.* Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. М.: Мир, 1970.
3. *Demidenko G.V.* On conditions for exponential dichotomy of systems of linear differential equations with periodic coefficients // Int. J. Dyn. Syst. Differ. Equ. 2016. Vol. 6, No. 1. P. 63–74.
4. *Годунов С.К.* Современные аспекты линейной алгебры. Новосибирск: Научная книга, 1997.
5. *Демиденко Г.В.* Матричные уравнения. Учебное пособие. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т., 2009.
6. *Демиденко Г.В.* Системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // Сиб. журн. индустр. матем. 2013. Т. 16. № 4. С. 38–46.

ЗАДАЧА ПОРТФЕЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА ФУНКЦИЮ РИСКА

И.О. Дмитрович, Н.С. Павленок

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
dmitrovich.ivan@gmail.com, paulianok@bsu.by

Работа посвящена одной практической задаче построения оптимального портфеля финансовых инструментов. Рассматривается поведение портфеля, состоящего из m финансовых инструментов на конечном промежутке времени. Предположим, что инструменты в портфеле изменяют свое состояние в дискретные моменты времени, которые для удобства будем обозначать через $1, 2, \ldots, N$. В каждый момент t из этой совокупности состояние портфеля описывается m-вектором $y(t) = (y_1(t), y_2(t), \ldots, y_m(t))$, где $y_i(t)$ — кумулятивная доходность i-го инструмента к моменту времени t.

Пусть $w = (w_1, w_2, \ldots, w_m)$ — вектор весов инструментов в портфеле. Предположим, что для w должны выполняться ограничения $w_* \leq w \leq w^*$, где w_*, w^* — заданные m-векторы. Введем множество $W = \{w \in R^m : \ w_* \leq w \leq w^*, \ \sum_{i=1}^m w_i \leq 1\}$. Следуя [1], функцию потерь (риска) в дискретный момент времени $t = \overline{1, N}$ определим как разность

$$D(w,t) = \max_{\tau=\overline{1,t}} \{y'(\tau)w\} - y'(t)w, \ w \in W, \ t = \overline{1, N},$$

где $y'(t)w$ — доход, возвращаемый портфелем в момент времени $t = \overline{1, N}$. Тогда максимальные потери на заданном промежутке времени будут равны

$$M(w) = \max_{t=\overline{1,N}} D(w,t), \ w \in W.$$

Определим величину среднего годового дохода портфеля как

$$R(w) = y'(N)w/(nC), \ w \in W,$$

где n — число лет на заданном промежутке времени, C — доступный капиталл.

Аналогично подходу Марковица [2], задачу максимизации среднего годового дохода с ограничением на максимальные потери можно сформулировать следующим образом:

$$R(w) = y'(N)w/(nC) \to \max_w, \tag{1}$$

$$M(w) = \max_{t=\overline{1,N}} \{ \max_{\tau=\overline{1,t}} \{y'(\tau)w\} - y'(t)w\} \leq \nu C, \ w \in W,$$

где ν — доля капиталла, который может быть потерян. Задача (1) представляет собой задачу выпуклой оптимизации с линейной целевой функцией и выпуклыми ограничениями.

Если ввести вспомогательные переменные $u(t) = \max_{\tau=\overline{1,t}}\{y'(\tau)w\}$, $t = \overline{1,N}$, то задача (1) может быть сведена к задаче:

$$y'(N)w/(nC) \to \max_{w,u_t}, \tag{2}$$

$$0 \leq u(t) - y'(t)w \leq \nu C, \ u(t-1) - u(t) \leq 0, \ t = \overline{1,N}, \ w \in W,$$

которая представляет собой задачу линейного программирования с $(3N+1)$ основным ограничением-неравенством и $(N+m)$ неизвестными. Задача (2) решалась двойственным методом [3] на промежутке времени, равном 5-ти годам, для 20 биржевых инвестиционных фондов (ETFs) при различных значениях параметра ν. Полученная граница эффективности представлена на рис. 1.

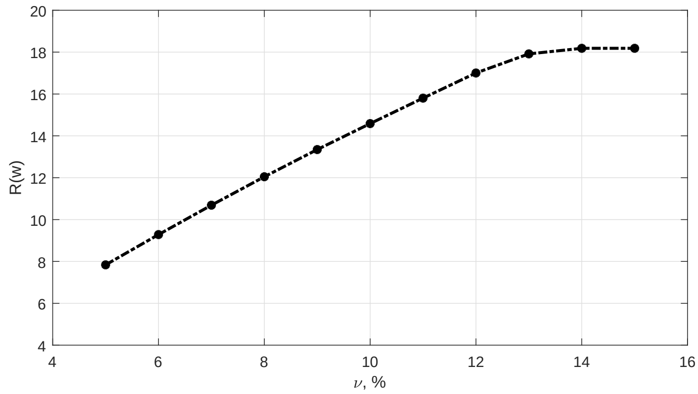


Рис. 1 — Граница эффективности при ограничениях на максимальные потери

Библиографические ссылки

1. *Chekhlov A., Uryasev S., Zabarankin M.* Portfolio Optimization with Drawdown Constraints. Asset and Liability Management Tools // 43rd IEEE Conference on Decision and Control, 2004. Vol. 4. P. 4286–4291.
2. *Markovitz H.M.* Portfolio Selection // The Journal of Finance. 1952. Vol. 7. P. 77–91.
3. *Габасов Р., Кириллова Ф.М., Тятюшкин А.И.* Конструктивные методы оптимизации. Часть I. Мн.: Университетское, 1984.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ УПРАВЛЕНИЯ ПО ПРОГНОЗИРУЮЩЕЙ МОДЕЛИ В ЗАДАЧАХ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА

Н.М. Дмитрук, М.А. Готовец

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
{dmitrukn, hatavets}@bsu.by

Введение. Управление по прогнозирующей модели (Model Predictive Control — MPC), является одним из современных методов теории управления [1]. В приложениях, в которых основное внимание уделяется оптимизации экономических параметров (минимизация энергетических затрат, максимизация выпуска, прибыли), применяются методы экономического MPC (EMPC) [1, гл.8]. Цель настоящего сообщения — сравнить различные подходы EMPC при решении ряда задач экономического роста из работы [2].

1. Модель экономического роста. Идеи работы демонстрируются на задаче оптимального экономического роста [2, стр. 17]

$$\max_u \int_0^\infty e^{-\rho t} \left[\ln(1-u(t)) + \ln(f(x(t)))\right] dt, \tag{1}$$

$$\dot{x} = u(t) f(x(t)) - \mu x(t),\ x(0) = x_0,\ 0 \le u(t) \le 1-\varepsilon,\ t \ge 0,$$

где $x = x(t) \in \mathbb{R}$ — фондовооруженность одного рабочего в момент времени t, $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — производственная функция, $u = u(t) \in \mathbb{R}$ — доля инвестируемого выпуска в момент времени t, $\mu > 0$ — темп роста трудовых ресурсов, $\rho > 0$ — норма дисконтирования.

Методы MPC [1] предполагают построение обратной связи на основе повторяющегося в каждый момент времени $\tau \in \Delta = \{0, h, 2h, \ldots\}$, где h — период квантования, решения прогнозирующей задачи оптимального управления (ОУ) с конечным горизонтом $T = Nh$ ($N \in \mathbb{N}$), в которой начальное условие для прогнозирующей модели совпадает с измеренным состоянием объекта управления, и применении оптимального значения управления $u^0(\tau)$ в момент τ к объекту. Выбор прогнозирующей задачи ОУ зависит от конкретного подхода MPC.

2. Прогнозирующие задачи ОУ. В настоящей работе исследуются три подхода. В первом прогнозирующая задача имеет вид

$$\max_u \int_\tau^{\tau+T} e^{-\rho t} \left[\ln(1-u(t)) + \ln(f(z(t)))\right] dt, \tag{2}$$

$$\dot z = u(t)f(z(t)) - \mu z(t),\ z(\tau) = x(\tau),\ 0 \le u(t) \le 1-\varepsilon,\ t \in [\tau, \tau+T],$$

где через $z = z(t)$ обозначены состояния прогнозирующей модели, чтобы отличать их от состояний объекта $x(t)$, $x(\tau)$ — текущее состояние объекта. Задача (2) не содержит дополнительных ограничений на состояние, выбирается достаточно продолжительный горизонт планирования T. Такой подход соответствует неограниченному MPC [1, гл.4].

Во втором подходе прогнозирующая задача ОУ имеет вид

$$\max_u \int_\tau^{\tau+T} e^{-\rho t} \left[\ln(1-u(t)) + \ln(f(z(t)))\right] dt, \tag{3}$$

$$\dot z = u(t)f(z(t)) - \mu z(t),\ z(\tau) = x(\tau),\ z(\tau+T) = x_s,$$
$$0 \le u(t) \le 1-\varepsilon,\ t \in [\tau, \tau+T],$$

где x_s — магистральное значение фондовооруженности, которое находится из условия $f'(x) = \rho + \mu$, см. [2]. Таким образом, в задаче (3) добавляется требование окончания процесса точно на магистрали.

Наконец, в третьем подходе в критерий качества добавляется терминальная стоимость W:

$$\max_u\ W(z(\tau+T)) + \int_\tau^{\tau+T} e^{-\rho t} \left[\ln(1-u(t)) + \ln(f(z(t)))\right] dt, \tag{4}$$

$$\dot z = u(t)f(z(t)) - \mu z(t),\ z(\tau) = x(\tau),\ 0 \le u(t) \le 1-\varepsilon,\ t \in [\tau, \tau+T].$$

В работе обсуждаются достоинства и недостатки EMPC на основе перечисленных прогнозирующих задач (2) – (4), а также предлагается новый подход к построению терминальной стоимости W в задаче (4), в котором обосновывается линейная стоимость $W(z) = \lambda_s z$, где $\lambda_s = 1/f(x_s)(1-u_s)$, $u_s = \mu x_s/f(x_s)$ — магистральные значения сопряженной переменной и управления, соответственно.

Предложенные подходы демонстрируются также в применении к задаче роста технологического последователя [2, стр. 153] и могут использоваться при решении других экономических задач, обладающих магистральным свойством, например, в задачах оптимизации динамики фирмы [3].

Библиографические ссылки

1. *Grüne L., Pannek J.* Nonlinear Model Predictive Control. Springer, 2017.
2. *Асеев С.М., Кряжимский А.В.* Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста. Труды МИАН, 257. М.: Наука, 2007.

3. *Габасов Р., Габасова О.Р., Дмитрук Н.М.* Синтез оптимальной политики для производственно-финансовой модели фирмы II. Программные и позиционные решения // Автоматика и телемеханика. 1998. № 10. С. 95–112.

ИМПУЛЬСНЫЕ УПРАВЛЕНИЯ НАВЕДЕНИЕМ МЕХАНИЗМА ПЕРЕГРУЗКИ ТОПЛИВНЫХ СБОРОК

Ю.Ф. Долгий[1,2], А.Н. Сесекин[1,2], О.Л. Ташлыков[2], Д.Р. Кувшинов[2]

[1] Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, Россия

[2] Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия

`yurii.dolgii@imm.uran.ru, a.n.sesekin@urfu.ru`

Введение. Система перегрузки реактора БН-600 предназначена для перегрузки топливных сборок и состоит из совокупности узлов, обеспечивающих наведение механизма перегрузки в заданное положение [1]. На корпусе реактора расположены две поворотные пробки, меньшая из них расположена внутри большой пробки. На меньшей пробке размещен механизм захвата топливной сборки. В данной работе рассматривается задача наведения захвата, расположенного на меньшей пробке, на заданную топливную сборку, которая описывается нелинейной управляемой системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Для ее решения в [2] использовался метод разделения движений поворотных пробок. Если центр масс меньшей пробки лежит на ее оси вращения, то управляемая система линейна. Решение задачи быстродействия для нее предложено в [3]. В данной работе при решении нелинейной задачи используются импульсные управления.

1. Постановка задачи. Кинетическая энергия поворотного механизма определяется формулой

$$T = \frac{1}{2}\left(J_1 + m_2 e_2^2\right)\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}J_2\left(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2\right)^2$$

$$+m_2 e_2 a_2 \cos(\varphi_2)\dot{\varphi}_1\left(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2\right),$$

где J_1, J_2 — моменты инерции большой и малой пробок относительно их осей вращения, e_2 — расстояние между осями вращения пробок, a_2 — расстояние от оси вращения малой пробки до ее цента масс, m_2 — масса малой пробки, φ_1 — угол поворота большой пробки, φ_2 — угол поворота малой пробки относительно большой. Механизм перегрузки управляется двумя независимыми приводами большой и малой пробок, создающими моменты сил u_1 и u_2 соответственно.

В начальный момент времени $t = 0$ захват находится в начальном положении, определяемом обобщенными координатами $\varphi_1(0) = \varphi_1^0$, $\varphi_2(0) = \varphi_2^0$ и имеет нулевые обобщенные скорости. Требуется привести его в конечный момент времени $t = T$ в заданное конечное положение, определяемое обобщенными координатами $\varphi_1(T) = \varphi_1^T$, $\varphi_2(T) = \varphi_2^T$ с нулевыми обобщенными скоростями.

2. Траектория движения захвата. При решении задачи используются импульсные управления, которые из начального положения равновесия выводят управляемую систему на специальную траекторию, соединяющую начальное и конечное положение захвата, и гасят скорости в конечном положении.

Теорема 1. *Траектория, соединяющая начальное и конечное положение захвата, определяется формулой*

$$\varphi_1 + \int\limits_{\varphi_2^0}^{\varphi_2} \frac{\beta(s) - sgn\left(\varphi_2^T - \varphi_2^0\right)\sqrt{\frac{2\beta(s)-1+\alpha-\beta^2(s)}{p(2\beta(s)-1+\alpha)-1}}}{2\beta(s) - 1 + \alpha} ds = \varphi_1^0,$$

в которой параметр p находится, используя заданное конечное положение. Здесь $\beta(s) = 1 + \frac{m_2 e_2 a_2}{J_2} cos(s)$, $\alpha = \frac{J_1 + m_2 e_2^2}{J_2}$.

Используются методы классической механики для аналитического интегрирования системы нелинейных дифференциальных уравнений [4].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00371-а).

Библиографические ссылки

1. *Белтюков А.И., Карпенко А.И., Полуяктов С.А., Ташлыков О.Л., Титов Г.П., Тучков А.М., Шеклеин С.Е.* Атомные электростанции с реакторами на быстрых нейтронах с натриевым теплоносителем. Ч. 1. Екатеринбург: УрФУ, 2013.
2. *Dolgii Yu.F., Sesekin A.N., Tashlykov O.L., Tran K.T.* Work optimization of nuclear fuel reloading mechanism for BN-800 reactor // AIP Conference Proceedings 2313, 070006 (2020).
3. *Dolgii Yu.F., Sesekin A.N., Tashlykov O.L., Zaynullina E.Z.* Optimal control of the fuel reload mechanism // IFAC Paper OnLine, 2018. P. 636–641.
4. *Архангельский М.А.* Аналитическая динамика твердого тела. М.: Наука, 1977.

АЛГОРИТМ УПРАВЛЕНИЯ МАХОВИКОМ И ДЕБАЛАНСОМ РОБОТА ИНЕРЦИОИДА С ОГРАНИЧЕНИЕМ НА УГЛОВЫЕ УСКОРЕНИЯ

М.З. Досаев

Институт механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия
dosayev@imec.msu.ru

Введение. Рассматривается вибрационный робот (инерциоид) [1]. Робот состоит из корпуса 1, сбалансированного маховика 2, и дебаланса 3 (рис.1). Рассматривается плоско-параллельное движение корпуса по шероховатой поверхности.

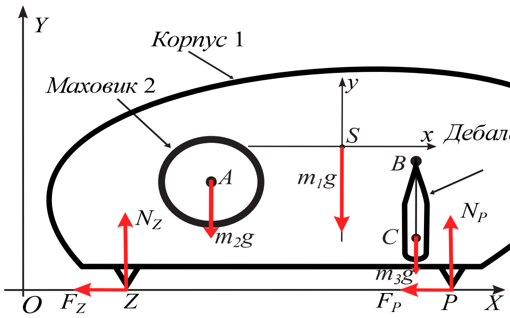


Рис. 1 — Схема робота

Взаимное расположение центров корпуса робота, маховика и дебаланса — произвольное. Будем считать, что корпус робота оснащен акселерометром, измеряющим ускорение его некоторой точки, а ротор двигателя дебаланса оснащен датчиками угла его поворота и угловой скорости, ротор маховика оснащен датчиком угловой скорости. В качестве управляющих функций используются угловые ускорения вращающихся структурных звеньев.

1. Оценка величины скорости дебаланса. Предложен алгоритм управления движением тела робота в нужном направлении с использованием полученного значения коэффициента трения. При реализации алгоритма с каждым новым оборотом эксцентрика время этапов, в течение которых тело движется, увеличивается. Максимальная скорость тела на каждом таком последующем этапе также увеличивается. В частности, было показано, что даже при относительно низком трении тело смещается за несколько циклов на расстояние порядка длины дебаланса. Предложенный алгоритм предусматривает последовательное релейное переключение управляющего углового ускорения дебаланса. При этом на фазовой плоскости (рис. 2) изображающая точка переходит с кривой, отвечающей фазе разгона вращающихся частей и покоя корпуса (штрихованная зеленая кривая) на другую, отвечающую фазе «полета» и перемещения корпуса (сплошная красная кривая) и обратно. Рассмотрим на сечении фазового цилиндра последовательность значений угла поворота дебаланса, при которых происходит k-е нечетное переключение углового ускорения. Показано, что если не рассматривать ограничение на максимальное значение ускорения, то скорость вращения дебаланса с ростом k будет расти до бесконечности.

2. Реализация нового алгоритма. Построен алгоритм управления роботом с учетом ограничений на угловые ускорения дебаланса и маховика. Дана оценка влияния этих ускорений на среднюю скорость робота.

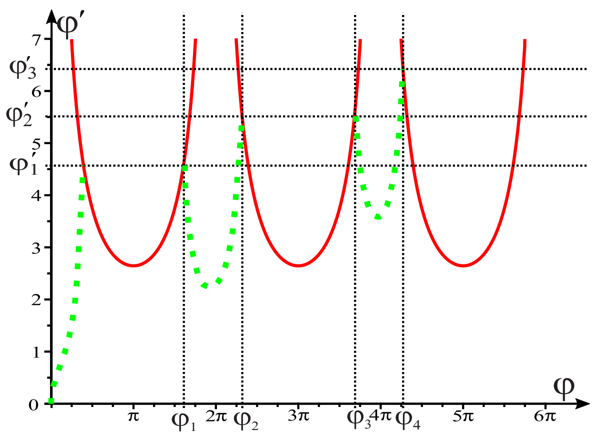


Рис. 2 — Фазовая плоскость

Работа выполнена при поддержке Междисциплинарной научно-образовательной школы Московского университета «Фундаментальные и прикладные исследования космоса».

Библиографические ссылки

1. *Dosaev M., Samsonov V., Hwang S.S.* Construction of control algorithm in the problem of the planar motion of a friction-powered robot with a flywheel and an eccentric weight // Applied Mathematical Modelling, 2021. Vol. 89. P. 1517–1527.

СКОЛЬЖЕНИЕ ТАБУРЕТА НА ЭЛАСТИЧНЫХ ОПОРАХ ПО ШЕРОХОВАТОЙ ПОВЕРХНОСТИ

М.З. Досаев, В.А. Самсонов

Институт механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия
`{dosayev,samson}@imec.msu.ru`

Введение. При моделировании торможения вибрационного робота на двух опорах по шероховатой плоскости были обнаружены проблемы с описанием силы трения [1]. Подобные проблемы встречались при моделировании и других задач механики [2]. Для регуляризации описания взаимодействия тела с опорой в модель введена податливость опор.

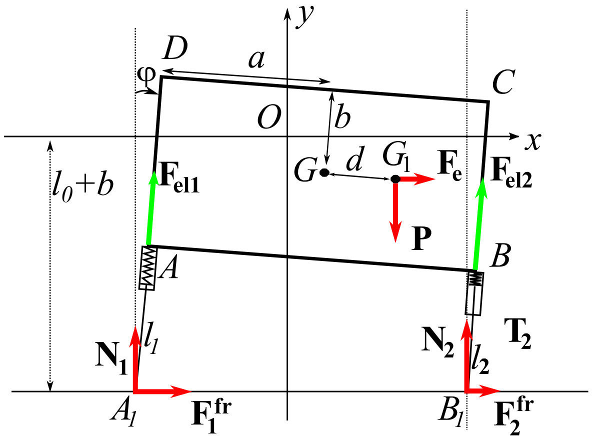


Рис. 1 — Тело с упругими опорами на шероховатой плоскости

1. Описание механической системы. Пусть тяжелое прямоугольное тело $ABCD$ массой m (рис. 1) совершает плоскопараллельное движение, опираясь двумя опорами AA_1 и BB_1 на горизонтальную шероховатую плоскость. Чтобы смоделировать податливость опор, будем считать их телескопическими, оснащенными одинаковыми пружинами достаточно большой жесткости. Центр тяжести G_1 прямоугольника смещен от центра прямоугольника G вдоль прямой DC на расстояние d. На систему действуют следующие внешние силы: сила тяжести mg (g – ускорение свободного падения), нормальные и тангенциальные реакции опор, которые в случае скольжения опорных ног связаны между собой по закону Кулона, а также боковая сила Fe, приложенная в центре масс G_1. В качестве обобщенных координат выберем координаты центра масс и угол между вертикалью и боковыми сторонами прямоугольника.

2. Динамика системы. Исследуем возможные типы поведения системы. Рассматриваемая система имеет переменную структуру. В общем случае, при скольжении обеих ног, у нее 3 степени свободы. В промежутки времени, когда одна из опор не скользит, у системы две степени свободы. Это эквивалентно наложению дополнительной связи. Вторая опора при этом останавливается только в те моменты времени, когда угловая скорость тела обратится в ноль. Проведено численное исследование полученной динамической системы переменной структуры для различных величин коэффициента трения. Показано, что даже простейшее переходное движение тела из некоторого состояния покоя в положение равновесия сопровождается проскальзыванием одной или обеих опор в зависимости от величины коэффициента трения. При трении равном приложенной боковой силе, при котором тело на жестких опорах не сдвинулось бы с места, центр масс системы набирает ненулевую скорость.

Библиографические ссылки

1. *Dosaev M., Samsonov V., Klimina L., Lokshin B., Hwang S.S., Selyutskiy Yu.* Braking of a solid body supported by two supports on a horizontal rough plane // ROMANSY 23 - Robot Design, Dynamics and Control, 2021. Vol. 601. P. 441–448.
2. *Neymark Y., Fufaev N.* The Painleve paradoxes and the dynamics of a brake shoe // J. Appl. Math. Mech., 1995. Vol. 59. No. 3. P. 343–352.

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СИЛЬНО-СЛАБО ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

С.И. Дудов, М.А. Осипцев

Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, Саратов, Россия

DudovSI@info.sgu.ru, Osipcevm@gmail.com

1. В последние десятилетия растёт интерес к задачам слабо – сильно выпуклого программирования (ССВП), то есть к задачам минимизации сильно или слабо выпуклых функций на сильно или слабо выпуклом множествах. Это стало следствием изучения сильно и слабо выпуклых множеств и функций ([1–3]) в рамках параметрически выпуклого анализа, являющимся одним из разделов негладкого анализа.

В докладе будут приведены необходимые и достаточные условия решения задач ССВП. Используемые обозначения: $D_r(x_1, x_2)$ – пересечение всех евклидовых шаров радиуса $r > 0$, содержащих точки x_1 и x_2; $\|\cdot\|$ – евклидова норма; $B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^p : \|x-y\| \leq r\}$; $Arg\min\limits_{x\in D} f(x) = \{y \in D : f(y) = \min\limits_{x\in D} f(x)\}$; $\partial f(x)$ – субдифференциал Кларка функции $f(\cdot)$ в точке x; $N(x, D)$ – нормальный конус Кларка множества D в точке x.

2. Введём необходимые определения (см. [1–3]).

Определение 1. *Множество* $A \subset \mathbb{R}^p$ *называется*
а) r-сильно выпуклым,если с любой парой точек x_1 и x_2, таких что $\|x_1 - x_2\| \leq 2r$ *оно содержит и* $D(x_1, x_2)$.

б) r-слабо выпуклым (по Виалю [7]), если для любой пары точек x_1 *и* x_2 *из A таких, что* $\|x_1 - x_2\| < 2r$, $x_1 \neq x_2$, *пересечение* $D_r(x_1, x_2) \cap A$ *содержит хотя бы ещё одну точку отличную от* x_1 *и* x_2.

Определение 2. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ *– открытое выпуклое множество и* $\rho > 0$. *Функция* $f(\cdot) : \Omega \to \mathbb{R}$ *называется ρ-сильно (слабо) выпуклой на* Ω, *если функция* $f(\cdot) - \frac{\rho}{2}\|\cdot\|^2$ $(f(\cdot) + \frac{\rho}{2}\|\cdot\|^2)$ *– выпукла на* Ω.

3. Приведём некоторые результаты.

Теорема 1. *Пусть* $r > 0$, $\rho > 0$, D *– r-сильно выпуклое множество,* $f(\cdot)$ *– ρ-слабо выпуклая на* $\mathbb{R}^p$ *функция. Для того, чтобы* $x_0 \in Arg\min\limits_{x \in D} f(x)$ *необходимо, а если* $\frac{M}{r} \geq \rho$, *то и достаточно, что бы* $0_p \in \partial f(x_0) + N(x_0, D)$. *При этом для всех* $x \in D$ *выполняется неравенство*

$$f(x) - f(x_0) \geq \frac{1}{2}\left(\frac{M}{r} - \rho\right)\|x - x_0\|^2.$$

Здесь $M = \max\{\|v\| : v \in \partial f(x_0) \cap -N(x_0, D)\}$.

Теорема 2. *Пусть* $r > 0$, $\rho > 0$, D *– r-слабо выпуклое множество,* $f(\cdot)$ *– ρ-слабо выпуклая на* $\mathbb{R}^p$ *и дифференцируемая в точке* x_0 *функция, для некоторого* $\delta > 0$ *выполняется* $B(x_0, \delta) \subset f'(x_0) + N(x_0, D)$ *и* $f'(x_0) \neq 0_p$. *Если* $\frac{\|f'(x_0\|}{r} \geq \rho\sqrt{1 - \frac{r^2}{\|f'(x_0)\|^2}}$, *то* $x_0 \in Arg\min\limits_{x \in D} f(x)$. *А если* $\frac{\|f'(x_0\|}{r} < \rho\sqrt{1 - \frac{r^2}{\|f'(x_0)\|^2}}$, *то* $x_0 \in Arg\min\limits_{x \in D(\delta)} f(x)$, *где* $D(\delta) = \left\{x \in D : \|x - x_0\| < \frac{2r\delta}{\sqrt{\delta^2 + \left(\rho r - \sqrt{\|f'(x_0\|^2 - \delta^2}\right)^2}}\right\}$.

Кроме того, получены необходимые и достаточные условия минимума сильно выпуклой функции на слабо выпуклом множестве, достаточные условия локального минимума других задач ССВП, рассматривалась также сильно – слабо выпуклая задача математического программирования.

В процессе доклада будут даны сравнения с другими известными результатами по характеризации решения задач ССВП.

Библиографические ссылки

1. *Vial J.P.* Strong and weak convexity of set and functions // Math. Oper. Res. 1983. Vol. 8. No. 2. P. 231–259.
2. *Половинкин Е.С., Балашов М.В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М.:Физматлит, 2006.
3. *Иванов Г.Е.* Слабо выпуклые множества и функции. М.:Физматлит, 2006.
4. *Wu Z.Y.* Sufficient global optimality conditions for weakly convex minimization problems // J. Glob. Optim.. 2007. Vol. 39. P. 427–440.
5. *Balashov M.* About the gradient projection algorithm for a strongly convex function and a proximally smooth set // J. of Convex Analysis, 2017. Vol. 24. No. 2. P. 493–500.
6. *Balashov M., Polyak B., Tremba A.* Gradient projection and conditional gradient methods for constrained nonconvex minimization // Numerical Functional Analysis and Optimization, 2020. Vol. 41. No. 7. P. 822–849.
7. *Дудов С.И., Осипцев М.А.* Характеризация решения задач сильно-слабо выпуклого программирования // Мат. сборник (в печати).

ВАРИАНТ ПРЯМО-ДВОЙСТВЕННОГО МЕТОДА НЬЮТОНА ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ПОЛУОПРЕДЕЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В.Г. Жадан

ФИЦ “Информатика и управление” РАН, Москва, Россия
vgzhadan@yandex.ru

Предлагается прямо-двойственный метод решения линейной задачи полуопределенного программирования. Отличие данного метода от других прямо-двойственных методов заключается в том, что текущие точки итеративного процесса могут принадлежать границам допустимых множеств.

Пусть $\mathbb{S}^n$ обозначает пространство симметричных матриц порядка n, и пусть $\mathbb{S}^n_+$ — конус положительно полуопределенных матриц из $\mathbb{S}^n$. Рассматривается задача полуопределенного программирования:

$$\min\ C \bullet X, \qquad A_i \bullet X = b^i, \quad 1 \le i \le m, \qquad X \succeq 0, \tag{1}$$

где $M_1 \bullet M_2 = \operatorname{tr} M_1^T M_2$ — скалярное произведение между матрицами по Фробениусу, $M \succeq 0$ означает, что $M \in \mathbb{S}^n_+$. Все матрицы C, X и A_i, $1 \le i \le m$, принадлежат $\mathbb{S}^n$. Двойственной к (1) является задача

$$\max\ \langle b, u\rangle, \qquad \sum\nolimits_{i=1}^{m} u^i A_i + Y = C, \qquad Y \succeq 0, \tag{2}$$

в которой $b = (b^1, \ldots, b^m)^T$. Предполагается, что задачи (1) и (2) имеют решения и что матрицы A_i, $1 \le i \le m$, линейно независимы. Допустимые множества в задачах (1) и (2) обозначим $\mathcal{F}_P$ и $\mathcal{F}_D$.

Решения $X \in \mathcal{F}_P$ и $[u, Y] \in \mathcal{F}_D$ должны удовлетворять условиям

$$X \circ Y = 0_{nn}, \qquad A_i \bullet X = b^i, \quad 1 \le i \le m, \qquad Y = C - \sum\nolimits_{i=1}^{m} u^i A_i, \tag{3}$$

где $X \circ Y = (XY + YX)/2$. Предлагаемый метод основан на применении метода Ньютона для решения системы уравнений (3).

Допустимая пара $[X, Y]$ называется *согласованной*, если $X \circ Y \succeq 0$. Пусть $[X, Y]$ — согласованная пара с разложениями $X = QD(\eta)Q^T$, $Y = HD(\theta)H^T$, где Q и H — ортогональные матрицы, $D(\eta)$ и $D(\theta)$ — диагональные матрицы с векторами собственных значений. В граничных точках X и Y можно выделить подматрицы Q_{BN} и H_{NB} матриц Q и H такие, что образы $\mathcal{R}(Q_{BN})$ и $\mathcal{R}(H_{NB})$ совпадают с образом $\mathcal{R}(U_P)$ матрицы U_P. Здесь U_P — матрица, составленная из собственных векторов $X \circ Y$, соответствующих положительным собственным значениям λ_P матрицы $X \circ Y = UD(\lambda)U^T$. Такие согласованные пары $[X, Y]$ назовем *регулярными*.

В матрице Q выделим подматрицу Q_{BB}, состоящую из собственных векторов X, соответствующих положительным собственным значениям X и принадлежащих нуль-пространству $\mathcal{N}(Y)$ матрицы Y. Аналогично, в матрице H выделим подматрицу H_{NN}, состоящую из собственных векторов Y, соответствующих положительным собственным значениям Y и принадлежащих нуль-пространству $\mathcal{N}(X)$ матрицы X. В регулярных парах $[X, Y]$ образы $\mathcal{R}(Q_{BB})$ и $\mathcal{R}(H_{NN})$ входят в нуль-пространство $\mathcal{N}(U)$ матрицы U. Если сумма $\mathcal{R}(Q_{BB})$ и $\mathcal{R}(H_{NN})$ составляет все нуль-пространство $\mathcal{N}(U)$, то такие пары называются *неособыми*, в противном случае они называются *особыми*.

В неособой паре $[X, Y]$ получаем, что матрицы $X_U = U^T X U$ и $Y_U = U^T Y U$ имеют блочно-диагональный вид

$$X_U = \begin{bmatrix} X_{U_P} & 0 & 0 \\ 0 & X_{U_B} & 0 \\ 0 & 0 & X_{U_N} \end{bmatrix}, \quad Y_U = \begin{bmatrix} Y_{U_P} & 0 & 0 \\ 0 & Y_{U_B} & 0 \\ 0 & 0 & Y_{U_N} \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Здесь $U_B = Q_{BB}$, $U_N = H_{NN}$ и $X_{U_P} = U_P^T X U_P$, $X_{U_B} = U_B^T X U_B$ и $X_{U_N} = U_N^T X U_N$. Аналогично определяются блоки во второй матрице в (4). Блоки X_{U_N} и Y_{U_B} нулевые.

Показывается, что ньютоновские направления ΔX_U и ΔY_U в таких парах целесообразно также брать в блочно-диагональном виде. Они удовлетворяют следующей системе линейных уравнений

$$\begin{array}{rcl} Y_{U_P} \circ \Delta X_{U_P} + X_{U_P} \circ \Delta Y_{U_P} & = & -D(\lambda_P), \\ A_{i,U_P} \bullet \Delta X_{U_P} + A_{i,U_B} \bullet \Delta X_{U_B} & = & 0, \quad 1 \le i \le m, \\ K_{j,U_P} \bullet \Delta Y_{U_P} + K_{j,U_N} \bullet \Delta Y_{U_N} & = & 0, \quad 1 \le j \le l. \end{array} \tag{5}$$

Здесь для единообразия используются матрицы $K_{j,U}$, $1 \le j \le l$, задающий базис в подпространстве, ортогональном подпространству порождаемом матрицами $A_{i,U}$, $1 \le i \le m$. Число неизвестных в системе (5) совпадает с числом уравнений. Получены точные выражения для ΔX_U и ΔY_U, причем размеры обратных матриц, которые возникают при решении системы (5) и зависят от ранга матриц U_P, уменьшаются в ходе итерационного процесса. Шаг для перемещения вдоль ΔX_U и ΔY_Y выбирается из условия наискорейшего спуска (уменьшения двойственного зазора). В особых парах $[X, Y]$ дополнительно решается вспомогательная линейная матричная задача дополнительности.

ИНТЕРПРЕТАЦИЯ И ПОСТРОЕНИЕ КВАЗИНЬЮТОНОВСКИХ МЕТОДОВ НА ОСНОВЕ ОПЕРАТОРОВ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВА

Н.Г. Журбенко

Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, Украина
zhurbnick@gmail.com

Предложенная Шором Н.З. идея использования операции преобразования пространства в (суб)градиентных алгоритмах хорошо известна, на ее основе разработаны широко используемые на практике эффективные алгоритмы негладкой оптимизации [1]. В частности, более 40 лет назад был разработан субградиентный алгоритм минимизации с растяжением пространства в направлении разности двух последовательных градиентов – r-алгоритм [2]. Практика использования r-алгоритма показывает, что до сих пор он является одним из наиболее эффективных алгоритмов негладкой оптимизации. Известно [2], что r-алгоритм с бесконечным коэффициентом растяжения является алгоритмом сопряженных градиентов. Однако на основе такого предельного варианта r-алгоритма построение квазиньютовского метода невозможно: после n итераций (n – размерность пространства переменных) матрица преобразования пространства вырождается в нулевую.

Квазиньютоновские методы являются эффективным и часто используемым на практике средством решения задач минимизации гладких функций. Имеются различные интерпретации и схемы построения этих методов. Первый вариант квазиньютоновского алгоритма (метод с переменной метрикой) был предложен еще в 1959 году В. Давидоном в работе [3]. К настоящему времени разработано ряд хорошо известных вариантов квазиньютоновских методов: Davidon–Fletcher–Powell (DFP) метод, Broyden–Fletcher– Goldfarb–Shanno (BFGS) метод и др. Имеются тысячи работ посвященным квазиньютоновским методам, но их исследование продолжается (отметим, например, работу [4]).

Известны следующие «градиентные» интерпретации квазиньютоновских методов. Первая из них обычно состоит в следующем. Шаг метода соответствует шагу градиентного метода в пространстве с определяемой матрицей H_k (приближение гессиана на итерации k) метрикой. Поэтому квазиньтоновские методы часто называют методами переменной метрики. Другая интерпретация метода связана с операцией преобразованием пространства переменных линейным оператором. При этом матрица H_k представляется в виде $H_k = B_k B_k^T$ ("в форме B"), где B_k – невырожденная матрица обратная к матрице преобразования пространства. Заметим, что известные варианты квазиньютоновских методов можно представить в форме B, то есть в форме коррекции матрицы преобразования пространства (см. например, [5]). Интерпретация квазиньютоновского метода для задачи минимизации квадратичной функции с позиции преобразования пространства состоит в следующем [6]. Пусть в текущем пространстве сделан шаг метода (получена новая точка по вектору смещения из предыдущей точки). После этого оператор очередного преобразования выбирается из следующего принципа: *образ вектора смещения должен стать собственным вектором матрицы квадратичной функции в преобразованном этим оператором пространстве с собственным значением равным единице.* Оказывается, что такой принцип выбора операторов преобразования соответствует известному квазиньютоновскому условию коррекции матрицы H_k.

Приведенная интерпретация квазиньютоновского условия позволяет строить новые модификации методов рассматриваемого класса [6]. В докладе будут приведены новые примеры квазиньютоновских алгоритмов на основе операторов преобразования пространства переменных.

Работа выполнена при финансовой поддержке Volkswagen Foundation (грант 97 775).

Библиографические ссылки

1. *Шор Н.З.* Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. Киев: Наук. думка, 1979, 199 с.
2. *Шор Н.З., Журбенко Н.Г.* Метод минимизации, использующий операцию растяжения пространства в направлении разности двух последовательных градиентов // Кибернетика. 1971. № 3. С. 51–59.
3. *Davidon W.* Variable metric method for minimization. Argonne National Laboratory Research and Development Report 5990 (1959).
4. *Rodomanov A., Nesterov Y.* New Results on Superlinear Convergence of Classical Quasi-Newton Methods (2020), arXiv:2004.14866.
5. *Стецюк П.И.* Линейные операторы в квазиньютоновских методах // Теория и приложения методов оптимизации. Киев: Ин-т кибернетики им. В.М.Глушкова НАН Украины, 1998. С. 3–8.
6. *Журбенко Н.Г.* Квазиньтоновские алгоритмы минимизации на основе использования оператора растяжения пространства // Теория оптимальных решений. Киев: Ин-т кибернетики им. В.М.Глушкова НАН Украины, 1999. С. 45–50.

О НАЗНАЧЕНИИ СПЕКТРА В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ С НЕСОИЗМЕРИМЫМИ СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ И РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ ПОСРЕДСТВОМ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ ПО ВЫХОДУ

В.А. Зайцев, И.Г. Ким

Удмуртский государственный университет, Ижевск, Россия
verba@udm.ru, kimingeral@gmail.com

Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{R}$; $\mathbb{K}^n = \{x = \mathrm{col}\,(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{K}\}$; $M_{m,n}(\mathbb{K})$ — пространство $m \times n$-матриц с элементами из поля $\mathbb{K}$; $*$ — операция эрмитова сопряжения матрицы. Рассмотрим управляемую систему, заданную линейной стационарной системой дифференциальных уравнений с несколькими несоизмеримыми сосредоточенными и распределенными запаздываниями в состоянии

$$\dot{x}(t) = \sum_{\nu=0}^{s} A_\nu x(t-h_\nu) + \sum_{\nu=1}^{s} \int_{-h_\nu}^{-h_{\nu-1}} S_\nu(\tau) x(t+\tau)\, d\tau + Bu(t), \quad t > 0, \quad (1)$$

$$y(t) = C^* x(t), \quad (2)$$

с начальным условием $x(\tau) = \phi(\tau)$, $\tau \in [-h_s, 0]$; здесь $0 = h_0 < h_1 < \ldots < h_s$ — постоянные запаздывания, $\phi\colon [-h_s, 0] \to \mathbb{K}^n$ — непрерывная функция, $A_\nu \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ $(\nu = \overline{0, s})$, $B \in M_{n,m}(\mathbb{K})$, $C \in M_{n,k}(\mathbb{K})$ —

постоянные матрицы, $S_\nu : [-h_\nu, -h_{\nu-1}] \to M_{n,n}(\mathbb{K})$ $(\nu = \overline{1,s})$ — интегрируемые функции, $x \in \mathbb{K}^n$ — фазовый вектор, $u \in \mathbb{K}^m$ — вектор управления, $y \in \mathbb{K}^k$ — вектор выходных величин.

Пусть управление в системе (1), (2) строится в виде линейной статической обратной связи по выходу с несколькими несоизмеримыми сосредоточенными и распределенными запаздываниями:

$$u(t) = \sum_{\rho=0}^{\theta} Q_\rho y(t-\sigma_\rho) + \sum_{\rho=1}^{\theta} \int_{-\sigma_\rho}^{-\sigma_{\rho-1}} R_\rho(\tau) y(t+\tau)\, d\tau, \quad t > 0, \tag{3}$$

$y(\tau) = 0$, $\tau < -h_s$. Здесь $Q_\rho \in M_{m,k}(\mathbb{K})$ $(\rho = \overline{0,\theta})$ — постоянные матрицы, $R_\rho : [-\sigma_\rho, -\sigma_{\rho-1}] \to M_{m,k}(\mathbb{K})$ $(\rho = \overline{1,\theta})$ — интегрируемые функции.

Определение 1. *Будем говорить, что для системы* (1), (2) *разрешима задача назначения произвольного спектра скалярного типа посредством линейной статической обратной связи по выходу* (3), *если для любого числа $\ell \geq 0$, любых чисел $0 = \omega_0 < \omega_1 < \ldots < \omega_\ell$, любых чисел $\gamma_{i\mu} \in \mathbb{K}$ $(i = \overline{1,n},\ \mu = \overline{0,\ell})$, и любых интегрируемых функций $\delta_{i\xi}\colon [-\omega_\xi, -\omega_{\xi-1}] \to \mathbb{K}$ $(i = \overline{1,n},\ \xi = \overline{1,\ell})$ существуют число $\theta \geq 0$, числа $0 = \sigma_0 < \sigma_1 < \ldots < \sigma_\theta$, постоянные матрицы $Q_\rho \in M_{m,k}(\mathbb{K})$ $(\rho = \overline{0,\theta})$, и интегрируемые функции $R_\rho : [-\sigma_\rho, -\sigma_{\rho-1}] \to M_{m,k}(\mathbb{K})$ $(\rho = \overline{1,\theta})$ такие, что характеристическая функция $\varphi(\lambda)$ замкнутой системы* (1), (2), (3) *имеет вид*

$$\varphi(\lambda) = \lambda^n + \sum_{i=1}^{n} \lambda^{n-i} \Big(\sum_{\mu=0}^{\ell} \gamma_{i\mu} e^{-\lambda\omega_\mu} + \sum_{\xi=1}^{\ell} \int_{-\omega_\xi}^{-\omega_{\xi-1}} \delta_{i\xi}(\tau) e^{\lambda\tau} d\tau \Big). \tag{4}$$

Пусть коэффициенты системы (1), (2) имеют следующий специальный вид: матрица A_0 имеет форму Хессенберга; для некоторого $p \in \{1, \ldots, n\}$ первые $p-1$ строк матрицы B и последние $n-p$ строк матрицы C равны нулю, первые $p-1$ строк и последние $n-p$ столбцов матриц A_ν и $S_\nu(\tau)$, $\nu = \overline{1,s}$, равны нулю, то есть

$$A_0 = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n, \quad a_{i,i+1} \neq 0, \quad i = \overline{1,n-1}; \quad a_{ij} = 0, \quad j > i+1; \tag{5}$$

$$B = \begin{pmatrix} O_1 \\ L \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} N \\ O_2 \end{pmatrix}; \tag{6}$$

$$A_\nu = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \widehat{A}_j & 0 \end{pmatrix}, \quad S_\nu(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \widehat{S}_\nu(\tau) & 0 \end{pmatrix}, \quad \nu = \overline{1,s}. \tag{7}$$

Здесь $O_1 = 0 \in M_{p-1,m}(\mathbb{K})$, $L \in M_{n-p+1,m}(\mathbb{K})$, $N \in M_{p,k}(\mathbb{K})$, $O_2 = 0 \in M_{n-p,k}(\mathbb{K})$, $\widehat{A}_\nu \in M_{n-p+1,p}(\mathbb{K})$, $\widehat{S}_\nu \in M_{n-p+1,p}(\mathbb{K})$, $\nu = \overline{1, s}$.

Теорема 1. *Пусть коэффициенты системы* (1), (2) *имеют специальный вид* (5), (6), (7). *Тогда равносильны следующие утверждения.*

1. *Матрицы* $C^*B,\ C^*A_0B,\ \ldots,\ C^*A_0^{n-1}B$ *линейно независимы.*
2. *Для системы* (1), (2) *разрешима задача назначения произвольного спектра скалярного типа посредством линейной статической обратной связи по выходу* (3).

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания № 075-00232-20-01, проект FEWS-2020-0010.

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВИРУСОВ И ИММУННОЙ СИСТЕМЫ

А.О. Игнатьев

Институт прикладной математики и механики, Донецк, Украина
aoignat@mail.ru

Введение. В настоящей статье изучается математическая модель, предложенная в работе [1]. В статье [1] авторы делают достаточно общие предположения. Модель содержит две переменные: популяцию вируса y и популяцию иммунных клеток z. Точная идентичность иммунных клеток остается открытой. Предполагается, что степень иммунного ответа зависит от вирусной нагрузки, и что иммунный ответ препятствует росту популяции вирусов.

1. Основные предположения. Математическая модель задается следующей парой дифференциальных уравнений:

$$\dot{y} = yg_r(y) - pyz, \quad \dot{z} = zf(y). \tag{1}$$

Популяция вирусов растет со скоростью, описываемой функцией $g_r(y)$. Эта функция зависит от количества вирусов y и от параметра r, определяющего скорость размножения вирусов. Популяция вируса подавляется иммунным ответом со скоростью pyz, где p — положительная константа. Рост иммунитета определяется вирусной нагрузкой y и описывается функцией $f(y)$. В работе [1] показано, каким условиям должны удовлетворять функции $g_r(y)$ и $f(y)$. В качестве примера такой системы, удовлетворяющей этим условиям, авторы статьи [1] предложили систему

$$\dot{y} = ry\left(1 - \frac{y}{k}\right) - ay - pyz, \quad \dot{z} = \frac{cyz}{1 + \varepsilon y} - qyz - bz, \qquad (2)$$

рассмотренную ранее в работе [2].

Популяция вирусов растет со скоростью $ry(1 - y/k)$. Параметр r определяет скорость, с которой происходит размножение вирусов, а параметр k представляет собой предельное возможное значение количества вирусов, т. е. $0 \leq (1 - y/k) \leq 1 \ \forall \ y$. Популяция вирусов умирает со скоростью ay и подавляется иммунной системой со скоростью pyz. Иммунитет растет со скоростью $cyz/(1 + \varepsilon y)$. Таким образом, рост иммунитета представляет собой функцию насыщения по отношению к имеющейся популяции вируса (при $y \to \infty$ функция $cyz/(1 + \varepsilon y)$ остается ограниченной). Иммунные клетки могут быть ингибированы вирусом со скоростью qyz. И, наконец, при отсутствии антигенной стимуляции иммунный ответ снижается со скоростью bz. Фазовые переменные $y(t)$ и $z(t)$ в системе дифференцальных уравнений (2) неотрицательны (в противном случае они бы не имели биологического смысла), все константы r, k, a, p, c, ε, q, b — положительны. В дальнейшем, когда мы будем говорить о решениях этой системы, мы будем подразумевать лишь неотрицательные решения.

Система (2) представляет собой систему (1), в которой $g_r(y) = r(1 - y/k) - a$, $f(y) = cy/(1 + \varepsilon y) - qy - b$. Приравняв нулю правые части уравнений (2), находим положения равновесия этой системы: $\mathfrak{B}_0 : y = 0, \quad z = 0$; $\mathfrak{B}_1 : y = y_1, \quad z = z_1$; $\mathfrak{B}_2 : y = y_2, \quad z = z_2$; $\mathfrak{B}_3 : y = y_*, \quad z = 0$, где

$$y_1 = \frac{c - q - b\varepsilon - \sqrt{D}}{2q\varepsilon}, \ y_2 = \frac{c - q - b\varepsilon + \sqrt{D}}{2q\varepsilon}, \ D = (c - q - b\varepsilon)^2 - 4bq\varepsilon,$$

$$z_1 = \frac{1}{p}\left[r\left(1 - \frac{y_1}{k}\right) - a\right], \ z_2 = \frac{1}{p}\left[r\left(1 - \frac{y_2}{k}\right) - a\right], \ y_* = k\left(1 - \frac{a}{r}\right).$$

$\mathfrak{B}_0$ соответствует ситуации, когда когда вирусы в организме - хозяине и иммунный ответ на них отсутствуют; в случаях $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$ вирусы и клетки иммунитета уравновешивают друг друга, что соответствует хроническому течению болезни; и, наконец, $\mathfrak{B}_3$ соответствуют случаю, когда иммунные клетки полностью подавлены вирусом.

2. Основные результаты. Доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Положение равновесия* $\mathfrak{B}_0$ *системы (2) глобально асимптотически устойчиво при* $r \leq a$ *и неустойчиво при* $r > a$.

Теорема 2. *В системе дифференциальных уравнений (2) положение равновесия* $\mathfrak{B}_1$ *локально асимптотически устойчиво, а положение равновесия* $\mathfrak{B}_2$ *неустойчиво.*

Теорема 3. *Положение равновесия* $\mathfrak{B}_3$ *системы (2) асимптотически устойчиво при* $y_* \in (0, y_1) \bigcup (y_2, +\infty)$ *и неустойчиво при* $y_* \in (y_1, y_2)$.

Библиографические ссылки

1. *Komarova N.L., Barnes E., Klenerman P., Wodarz D.* Boosting immunity by antiviral drag therapy: a simple relationship among timing, efficacy, and success // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 2003. Vol. 100. P. 1855–1860.
2. *Boer R.J., Boerlijst M.C.* Diversity and virulence thresholds in AIDS // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 1994. Vol. 91. P. 544–548.

ПРИБЛИЖЕННЫЕ СХЕМЫ ПОСТРОЕНИЯ АЛЬТЕРНИРОВАННОГО ИНТЕГРАЛА ПОНТРЯГИНА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

И.М. Исканаджиев

Ташкентский химико-технологический институт, Ташкент, Узбекистан
iskan1960@mail.ru

Пусть $cl(\mathbb{R}^d)$ (соответственно $Ccl(\mathbb{R}^d)$) обозначает семейство всех непустых замкнутых (выпуклых замкнутых) подмножеств $\mathbb{R}^d$ и $cm(\mathbb{R}^d)$ (соответственно $Ccm(\mathbb{R}^d)$) — семейство всех непустых компактных (выпуклых компактных) подмножеств $\mathbb{R}^d$. Пусть $\omega = \{0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_n = \tau\}$ — произвольное разбиение отрезка $I = [0, \tau]$, $\Delta_i = [\tau_{i-1}, \tau_i]$ и δ_i — длина отрезка Δ_i, Ω — совокупность всех разбиений отрезка I.

Пусть задано управляемое дифференциальное включение

$$\dot{z} \in -F(t, \upsilon), \tag{1}$$

где $z \in \mathbb{R}^d$, $\upsilon \in Q$, $t \in I = [0, \tau]$, $Q \in cm(\mathbb{R}^q)$ и $F : I \times Q \to Ccm(\mathbb{R}^d)$ — непрерывное отображение. Дано терминальное множество M, $M \subset \mathbb{R}^d$. Пусть $\omega \in \Omega$. Положим

$$S^0 = M,\ S^i = \bigcap_{\upsilon(\cdot) \in Q(\Delta_i)} \left[S^{i-1} + \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} F(t, \upsilon(t))dt \right],\ \ S(\omega) = S^n.$$

Множество
$$W^{\tau}(M) = \bigcap_{\omega \in \ \Omega} S(\omega)$$
называется альтернированным интегралом Понтрягина [1–2]. Пусть по прежнему $\omega \in \Omega$. Определим множества $D^0 = M$,
$$D^i = \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \bigcap_{\upsilon \in Q} \left[\frac{1}{\delta_i} D^{i-1} + F(t,\upsilon)\right] dt,\ D(\omega) = D^n,\ D^{\tau}(M) = \bigcup_{\omega} D(\omega).$$

Теорема 1. *Пусть $M \in cl(\mathbb{R}^d)$. Тогда справедливо равенство*
$$W^{\tau}(M) = \bigcap_{\varepsilon > 0} D^{\tau}(M + \varepsilon H).$$

Семейство всех измеримых замкнутозначных отображений $A(\cdot) : \Delta \to cl(\mathbb{R}^d)$, удовлетворяющих условию $\int_{\Delta} A(t)dt \subset D$, обозначим $\Phi(\Delta, D)$. Следующая схема построения альтернированного интеграла была введена в работе [3] применительно к линейным играм. Она примечательна тем, что сочетает в себе элементы первого и второго прямых методов Л.С.Понтрягина для задачи преследования [1]:
$$B^0 = M, \quad B^i = \bigcup_{A(\cdot)} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \bigcap_{\upsilon \in Q} [A(t) + F(t,\upsilon)] dt,$$
где объединение производится по всем $A(\cdot) \in \Phi(\Delta_i, B^{i-1})$. Положим
$$B(\omega) = B^n, \quad B^{\tau}(M) = \bigcup_{\omega} B(\omega).$$

Теорема 2. *Пусть $M \in Ccl(\mathbb{R}^d)$. Тогда справедливо равенство*
$$W^{\tau}(M) = \bigcap_{\varepsilon > 0} B^{\tau}(M + \varepsilon H).$$

В заключение заметим, что теорема 1 и теорема 2 может быть интерпретирована следующим образом (ср. [1–3]). Если M — выпуклое замкнутое подмножество $\mathbb{R}^d$ и $z_0 \in W^{\tau}(M)$, то в игре (1) из точки z_0 возможно завершение преследования в момент времени τ с помощью кусочно-стробоскопический стратегии [3]. При этом преследователь для построения своего управления пользуется информацией о текущих значениях управления убегающего и текущем фазовым состоянии системы (1) в дискретные моменты времени.

Библиографические ссылки

1. *Понтрягин Л.С.* Линейные дифференциальные игры преследования // Матем. сбор. 1980. Т. 112 (154). № 3 (7). С. 307–330.
2. *Азамов А.* О втором методе Понтрягина в линейных дифференциальных играх // Матем.сбор. 1982. Т. 118 (160). № 3 (7). С. 422–430.
3. *Сатимов Н., Карабаев Э.* Об одном методе решения задачи преследования // ДАН УзССР. 1986. № 3. С. 5–6.

О ЗАДАЧЕ ПОКРЫТИЯ РАВНЫМИ ШАРАМИ ТРЕХМЕРНОГО МНОЖЕСТВА В НЕЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

А.Л. Казаков, А.А. Лемперт

Институт динамики систем и теории управления
имени В.М. Матросова СО РАН, Иркутск, Россия
kazakov@icc.ru

Введение. Классическая задача о покрытии шарами заключается в отыскании такого расположения шаров, чтобы их объединение полностью покрывало заданное множество. При этом либо их количество, либо суммарный объем минимизируется [1]. В данной работе мы рассматриваем задачу с заданным количеством равных шаров. Целью оптимизации является минимизация радиуса элементов покрытия, и при этом все шары должны быть размещены. Множество-контейнер может быть как выпуклым, так и невыпуклым.

Подобные задачи возникают при размещении датчиков мониторинга загрязнения или температуры воздуха и воды [3]; при разработке систем видеонаблюдения на складах и производствах, которая позволяет оператору наблюдать все охраняемые объекты [4]; при проектировании беспроводной сети, когда необходимо обеспечить доступ пользователей к сети из любого места помещения [5]. Кроме того, большую роль играет размещение датчиков при проектировании «умных» помещений в технологии Smart Grid.

1. Постановка задачи. Пусть X – пространство с метрикой

$$\rho(a,b)=\min_{G\in G(a,b)}\int\limits_G \frac{dG}{f(x,y,z)}, \tag{1}$$

где $G(a,b)$ – множество непрерывных кривых, лежащих в X и соединяющих точки a и b, $0<\alpha\le f(x,y,z)\le\beta$ – непрерывная функция, определяющая мгновенную скорость распространения сигнала в каждой точке пространства X.

Фактически, функционал (1) определяет минимальное время прохождения сигнала между двумя точками, далее будем использовать его вместо расстояния.

Пусть также заданы замкнутое ограниченное множество $P \subset X$, n шаров S_i с центрами $s_i(x_i, y_i, z_i)$ и радиусом R. Необходимо найти такое расположение центров $s = (s_1, s_2, ..., s_n) \in P$, чтобы множество P принадлежало объединению шаров, и их радиус был минимальным:

$$\begin{gathered} R \to \min, \\ \forall p \in P, \exists i : \rho(O_i, p) \leq R, \\ O_i \in P, i = 1...n. \end{gathered} \tag{2}$$

2. О методе решения. Основная сложность задачи (2) заключается в необходимости многократного решения задачи (1). Для отыскания решения предлагается численный метод, основанный на оптико-геометрическом подходе [2], который позволяет заменить обычное расстояние между точками минимальным временем перемещения между ними. Его идея заключается в имитации распространения световой волны в оптически неоднородной среде, что позволяет найти фотон, который первым достигает целевой точки, и восстановить его траекторию. Эта процедура обеспечивает решение задачи (1).

Алгоритм решения задачи (2) состоит из следующих этапов: 1) начальное приближение (центры шаров) задается случайным образом; 2) производится разбиение покрываемого множества на обобщенные области Дирихле; 3) каждая область покрывается минимальным шаром; 4) производится переразбиение покрываемого множества на обобщенные области Дирихле относительно новых найденных центров шаров. Процесс продолжается пока радиус покрытия уменьшается.

Предложенный метод программно реализован. Проведены вычислительные эксперименты по нахождению покрытий различных множеств (выпуклых, невыпуклых, неодносвязных). Результаты расчетов позволяют оценить работоспособность и эффективность предложенного алгоритма. Выполнена 3-D визуализация полученных результатов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 20-010-00724.

Библиографические ссылки

1. *Тот Л.Ф.* Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве. М.: Физматлит, 1958.
2. *Казаков А.Л., Лемперт А.А.* Об одном подходе к решению задач оптимизации, возникающих в транспортной логистике // Автоматика и телемеханика. 2011. Т. 72. № 7. С. 50–57.
3. *Казаковцев Л.А., Гудыма М.Н.* Постановка задачи оптимального размещения сети датчиков мониторинга загрязнения воздуха и воды // Перспективы развития информационных технологий. 2013. № 13. С. 19–24.
4. *Пескин А.Е.* Системы видеонаблюдения. Основы построения, проектирования и эксплуатации. М.: Горячая линия-Телеком, 2013.
5. *Казаковцев Л.А., Гудыма М.Н., Ступина А.А., Кириллов Ю.И.* Задача выбора оптимального размещения элементов беспроводной сети // Научное обозрение. Технические науки. 2014. № 1. С. 176–176.

МЕТОД МАЛОГО ПАРАМЕТРА В ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ НА ТРАЕКТОРИЯХ ВОЗМУЩЕННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

А.И. Калинин, Л.И. Лавринович

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
{kalininai, lavrinovich}@bsu.by

Многие прикладные задачи оптимального управления в своих математических моделях содержат малые параметры, причем, зачастую модели существенно упрощаются (понижается порядок дифференциальных уравнений, исчезают сложные члены и т.п.), если положить эти параметры равными нулю. В таких случаях целесообразно использовать асимптотические методы, основное достоинство которых состоит в том, что при их применении исходные задачи, которые принято называть возмущенными, сводятся к коррекции решений более простых задач оптимального управления.

В частности, выигрыш от применения асимптотических методов к задачам оптимизации квазилинейных систем, содержащих малые параметры при нелинейностях, состоит, прежде всего, в том, что вместо исходных по существу нелинейных задач решаются задачи оптимизации линейных динамических систем. При применении асимптотических методов к задачам оптимизации сингулярно возмущенных систем, которые содержат малые параметры при части производных, исходные задачи оптимального управления распадаются на задачи меньшей размерности. Такая декомпозиция позволяет эффективно решать задачи с большим числом фазовых переменных. Кроме того, при применении асимптотического подхода удается избежать интегрирования сингулярно возмущенных систем, которые являются жесткими.

Настоящий доклад представляет собой обзор результатов, полученных для задач минимизации интегральных квадратичных функционалов на траекториях квазилинейных и сингулярно возмущенных линейных динамических систем. Эти задачи исследуются с помощью единого подхода, в основу которого положена идея конечномерной параметризации оптимальных управлений. Суть этого подхода состоит в следующем. Для многих задач оптимального управления можно указать конечномерные элементы (назовем их определяющими), по которым легко восстанавливается решение задачи, причем в возмущенных задачах, что очень существенно, они, как правило гладким образом зависят от малого параметра. К определяющим элементам, в частности, относятся точки переключения релейных управлений, начальные и конечные моменты особых и квазиособых режимов, множители Лагранжа, длительность процесса (в том случае, когда она не задана). С помощью принципа максимума [1] и условий допустимости управлений для определяющих элементов можно составить систему конечных уравнений. Формируются эти уравнения путем интегрирования прямой и сопряженной динамических систем, которые являются возмущенными. Применяя соответствующие асимптотические методы (в регулярно возмущенных задачах — классическую технику Пуанкаре, а в сингулярно возмущенных — метод пограничных функций [2]), можно разложить функции, формирующие конечные уравнения, по степеням малого параметра, а затем в условиях применимости теоремы о неявной функции методом неопределенных коэффициентов найти асимптотику определяющих элементов. Для построения асимптотических приближений заданного порядка к оптимальному управлению достаточно заменить неизвестные определяющие элементы их асимптотическими приближениями соответствующего порядка.

С помощью предложенного подхода разработаны алгоритмы построения асимптотических приближений в виде программы и обратной связи к решениям задач оптимального управления квазилинейными и сингулярно возмущенными системами с фиксированным и подвижным правым концом траекторий. Определяющими элементами в этих задачах являются начальные значения сопряженных переменных и множители Лагранжа, соответствующие в силу принципа максимума оптимальному управлению.

Библиографические ссылки

1. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983.
2. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.

ПРЯМОЙ МЕТОД ЛЯПУНОВА В ЗАДАЧЕ О НЕУСТОЙЧИВОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Б.С. Калитин

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
Kalitine@yandex.by

В докладе излагается развитие и современное состояние проблем неустойчивости замкнутых инвариантных множеств динамических систем, исследуемых методом функций Ляпунова. Основополагающие концепции понятий устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости равновесия нелинейных систем дифференциальных уравнений представлены А.М. Ляпуновым в его докторской диссертации [1] в 1892 году. Для исследования проблем устойчивости он предложил использовать вспомогательные функции, среди которых две теоремы о неустойчивости [1, с. 87], [1, с. 92]. Впоследствии такой подход назвали методом функций Ляпунова или прямым методом Ляпунова.

Параллельно с глубокими и содержательными результатами метода Ляпунова развивалась качественная теория дифференциальных уравнений применительно к проблемам устойчивости движения абстрактных динамических систем. Этому предшествовала огромная исследовательская работа научной школы В.В. Немыцкого и В.В. Степанова в МГУ, научной школы Н.П. Еругина, Ю.С. Богданова и Е.А. Барбашина в Беларуси, Кишиневской научной школы К.С. Сибирского в Молдове и ряда зарубежных центров исследований. Важные достижения по развитию прямого метода содержатся в работах [4–11].

В.И. Зубов [2] продемонстрировал возможности метода функций Ляпунова в исследовании задач орбитальной устойчивости и неустойчивости замкнутого инвариантного множества динамической системы на метрическом пространстве. Он сформулировал ряд критериев качественной теории устойчивости движения, среди которых критерий устойчивости [2, с. 35] и критерий асимптотической устойчивости [2, с. 38], а также обобщение и развитие идей Н.П. Еругина [3] в исследовании дифференциальных систем на плоскости. Для изучения свойств устойчивости в [2] предлагается поиск (подбор) функции V такой, что суперпозиция $V(xt)$ вдоль движения $x: \ t \to xt$ динамической системы обладала бы нужным свойством монотонности. При этом метод Ляпунова-Зубова относится к проблемам устойчивости и неустойчивости. Исследованиями работы [2] был заложен фундамент разработки эффективного инструмента решения проблем устойчивости движения абстрактных динамических систем методом функций Ляпунова.

Практика дальнейшего развития показала, что созданные инструменты прямого метода и методов качественной теории не являются единственным, они могут быть расширены с целью охвата и применения в более широком круге реальных динамических процессов для задач устойчивости. Исследования ученых [4−9] — современников и предшественников — дополнили и обогатили арсенал теорем Ляпунова-Зубова. Они, во-первых, расширили класс функций Ляпунова, пригодных для изучения задач устойчивости, что крайне важно с практической точки зрения. Во-вторых, авторы открыли новые теоретические возможности дальнейшего развития теории устойчивости для разнообразных процессов динамики, как в конечномерных, так и в бесконечномерных фазовых пространствах. Вместе с тем, представленные ими основные результаты прямого метода сохранили преемственность идей и формулировок утверждений академика А.М. Ляпунова.

Библиографические ссылки

1. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. М.: Гостехиздат, 1950.
2. *Зубов В.И.* Устойчивость движения (методы Ляпунова и их применение), 2-е изд. М.: Высшая школа, 1984.
3. *Еругин Н.П.* О некоторых вопросах устойчивости движения и качественной теории дифференциальных уравнений в целом. Прикладная математика и механика. 1950. Vol. 14. No. 5. P. 459–512.
4. *Bhatia N. P., Szegö G.* Stability theory of Dynamical systems. Berlin-New-York: Springer, 1970.
5. *Saperstone S.H.* Semidynamical Systems in Infinite-Dimentional Space, Appl. Math. Sci. 37. New York–Berlin: Springer-Verlag, 1981.
6. *Абдуллин Р.З., Анапольский Л.Ю., Воронов А.А., Земляков А.С., Козлов Р.И., Маликов А.И., Матросов В.М.* Метод векторных функций Ляпунова в теории устойчивости. Под ред. А.А. Воронова, В.М. Матросова. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987.
7. *Сибирский С.К., Шубэ А.С.* Полудинамические системы (Топологическая теория). Кишинев: Штиинца, 1987.

8. *Андреев А.С.* Устойчивость неавтономных функционально-дифференциальных уравнений. Ульяновск: Ульяновский гос. ун-т, 2005.
9. *Калитин Б.С.* Устойчивость динамических систем (Качественная теория). Саарбрюкен: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2012.
10. *Калитин Б.С.* Устойчивость динамических систем (Метод знакопостоянных функций Ляпунова). Саарбрюкен: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2013.
11. *Калитин Б.С.* Устойчивость неавтономных дифференциальных уравнений. Минск: БГУ, 2013.

СРАВНЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ТРЕХ АЛГОРИТМОВ НЕЛИНЕЙНОЙ АДАПТАЦИИ В УПРАВЛЕНИИ ТРЕХЗВЕННЫМ МАНИПУЛЯТОРОМ

С.И. Колесникова

Санкт-Петербургский государственный университет
аэрокосмического приборостроения, Санкт-Петербург, Россия
skolesnikova@yandex.ru

Введение. В докладе исследуются свойства, приобретаемые объектом, заданного в виде нелинейной системы ОДУ (разностной) с неполным описанием в условиях направленного воздействия, полученного согласно трем алгоритмам: нелинейной адаптации на многообразии (NAD) [1, 2], модального управления (MOD) и кусочно-постоянного (RC). Численная апробация алгоритмов проведена на примере трехзвенного манипулятора (без ограничения общности). Предполагалось, что часть параметров неизвестна, и/или на объект воздействуют помехи (неслучайные/случайные), искажающие сигнал управления.

1. Постановка непрерывной задачи нелинейной адаптации. Рассматривается нелинейный объект с плохо формализуемой правой частью в описании

$$\begin{aligned} \dot{x_1}(t) =& f_1(x_1(t), x_2(t)), \\ \dot{x_2}(t) =& f_2(x_1(t), x_2(t)) + \zeta(t) + u(t), \end{aligned} \tag{1}$$

где (для определенности) $x_i, u, f_i, \zeta \in R^3, i = 1, 2,$ – векторные переменные состояний, управлений, нелинейные вектор-функции и неизвестное ограниченное возмущение, соответственно.

Для объекта (1) ставится задача нахождения закона управления в пространстве состояний, обеспечивающего перевод объекта управления (1) из произвольного начального состояния $x(0) = (x_1(0), x_2(0))$ в некоторой области фазового пространства в окрестность целевого многообразия $\psi(x) = 0, t \to \infty$, и асимптотически устойчивое удержание объекта в его окрестности [2, 3].

2. Постановка задачи 2 стохастического дискретного управления. Рассматривается объект со случайным возмущением

$$\begin{aligned} y_1(t+1) = & g_1(y_1(t), y_2(t)), \\ y_2(t+1) = & g_2(y_1(t), y_2(t)) + c\xi(t) + \xi(t+1) + u(t), \end{aligned} \tag{2}$$

где (для определенности) $y_i, u, g_i, \xi \in R^3, i = 1, 2,$ – векторные переменные состояний, управлений, нелинейные вектор-функции и случайное возмущение с ограниченной дисперсией, соответственно; $0 < c < 1$. Для объекта (2) ставится аналогичная задача определения закона управления, но с дополнительным условием минимума дисперсии выходной макропеременной $\psi(y)$.

Теорема 1. *NAD-управление $u(t)$, если существует, определяется аналитически и обеспечивает асимптотическую устойчивость объектам управления (1, 2) в окрестности $E[\psi(x(t))] \to 0$ при $t \to \infty$ и минимум дисперсии выходной макропеременной $\psi(y)$.*

В таблице приведены относительные ошибки управления и энергетические затраты (E_u) – результатов численного моделирования трех адаптивных регуляторов (NAD [3], MOD и RC) на примере задачи стабилизации координат $x_1 = (x_{11}, x_{12}, x_{13})$ трехзвенного манипулятора в окрестности целевого вектора x_1^*.

Таблица 1 — Средние ошибки и энергия управления

x_1	NAD	MOD	RC
x_{11}	0.06	1.2	5.43
x_{12}	0.06	1.3	4.91
x_{13}	0.06	0.9	0.68
E_u	$7.35 \cdot 10^7$	$13.35 \cdot 10^7$	$5.83 \cdot 10^6$

Заключение. В докладе исследуются свойства нового стохастического алгоритма нелинейной адаптации на многообразии и осуществляется сравнение показателей эффективности с модальным и кусочно-постоянным управлением.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-08-00747).

Библиографические ссылки

1. *Тюкин И.Ю., Терехов В.А.* Адаптация в нелинейных динамических системах. СПб.: ЛКИ, 2008.
2. *Колесников А.А.* Метод интегральной адаптации нелинейных систем на инвариантных многообразиях // Тр. 3-й мультиконференции по проблемам управления, 2010. С. 29–34.
3. *Kolesnikova S.I.* Synthesis of the control system for a second order non-linear object with an incomplete description // Automation and Remote Control. 2018. Vol. 79. No. 9. P. 1556–1566.

ПОСТРОЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ЗАМЫКАЕМЫХ ОБРАТНЫХ СВЯЗЕЙ В РЕЖИМЕ РЕАЛЬНОГО ВРЕМЕНИ В ЛИНЕЙНОЙ ТЕРМИНАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ

Д.А. Костюкевич

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
kostukDA@bsu.by

Для линейной системы управления с возмущением

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) + Mw(t), \quad x(0) = x_0, \quad t = 0, 1, \ldots, T-1, \quad (1)$$

рассматривается задача о минимизации гарантированного значения $\max_{w(\cdot)} c'x(T)$ терминального критерия качества при условии попадания траектории системы (1) с гарантией (при любой реализации $w(\cdot)$) на терминальное множество $X_T = \{x \in \mathbb{R}^n : g_{\min} \leq Hx \leq g_{\max}\}$ в момент времени T. Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — состояние, $u(t) \in U = \{u \in \mathbb{R}^r : u_{\min} \leq u \leq u_{\max}\}$ — управление, $w(t) \in W = \{w \in \mathbb{R}^p : ||w||_\infty \leq w_{\max}\}$ — неизвестное возмущение, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $M \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $H \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $g_{\min}$, $g_{\max} \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$, — заданные матрицы и векторы.

Дополним постановку предположением о том, что система (1) будет замкнута [1] в момент времени $T_1 \in \{1, 2, \ldots, T-1\}$ — момент замыкания системы (1). Следуя [2], считаем, что в момент времени T_1 можно: 1) точно измерить состояние объекта управления $x_1 = x^*(T_1)$; 2) с учетом измерения выбрать новое управление $u_1(\cdot|T_1, x_1)$.

Учитывая предположения, будем искать решение задачи в виде стратегии управления $\pi_1 = \{u_0(\cdot); u_1(\cdot|T_1, x_1), x_1 \in X(T_1|0, x_0, u_0(\cdot))\}$, где $X(T_{k+1}|T_k, x_k, u_k(\cdot)) = \{x \in \mathbb{R}^n : x = x(T_{k+1}|T_k, x_k, u_k(\cdot), w_k(\cdot))\}$, $x(t|T_k, x_k, u_k(\cdot), w_k(\cdot))$, $t = 0, 1, \ldots, T-1$, — траектория системы (1) с начальным условием $x(T_k) = x_k$ под действием управления

$u_k(\cdot) = (u_k(t) \in U, t \in \Delta_k)$ и возмущения $w_k(\cdot) = (w_k(t) \in W, t \in \Delta_k)$, $k = 0, 1$, $\Delta_0 = \{0, \dots, T_1 - 1\}$, $\Delta_1 = \{T_1, \dots, T - 1\}$, $T_0 = 0$, $T_2 = T$.

В [3] сформулированы задачи, по решению которых строится оптимальная стратегия $\pi_1^0 = \{u_0^0(\cdot); u_1^0(\cdot|T_1, x_1),\ x_1 \in X(T_1|0, x_0, u_0^0(\cdot))\}$, доставляющая минимум гарантированного значения терминального критерия (см. также задачи ниже при $\tau = 0$ и $z = x_0$).

Цель работы — управление системой (1) по принципу замкнутого контура. Поэтому на основе оптимальных стратегий (с моментом замыкания T_1) определим так называемую оптимальную замыкаемую обратную связь [1] для системы (1). Для этого погрузим рассматриваемую задачу в семейство задач, в котором процесс управления стартует в момент времени τ из состояния $z \in \mathbb{R}^n$. Оптимальную стратегию задачи семейства для позиции (τ, z) при $\tau \in \Delta_0$ обозначим $\pi_1^0(\tau, z) = \{u_0^0(\cdot|\tau, z); u_1^0(\cdot|T_1, x_1), x_1 \in X(T_1|\tau, z, u_0^0(\cdot|\tau, z))\}$. Здесь, следуя [3], получим, что $u_0^0(\cdot|\tau, z)$ является решением задачи

$$\min_{u_0} \max_{w_0} J_1(T_1, x(T_1|\tau, z, u_0(\cdot), w_0(\cdot))), \tag{2}$$

а $u_1^0(\cdot|T_1, x_1)$ при $x_1 \in X(T_1|\tau, z, u_0^0(\cdot|\tau, z))$ является решением задачи

$$\begin{aligned} J_1(T_1, x_1) = \quad & \min_{u_1} \max_{w_1} c' x(T|T_1, x_1, u_1(\cdot), w_1(\cdot)), \\ & x(T|T_1, x_1, u_1(\cdot), w_1(\cdot)) \subseteq X_T \ \forall\ w_1(\cdot). \end{aligned} \tag{3}$$

Тогда оптимальная замыкаемая обратная связь имеет вид

$$u^0(\tau, z) = \begin{cases} u_0^0(\tau|\tau, z), & \tau \in \Delta_0, \\ u_1^0(\tau|\tau, z), & \tau \in \Delta_1, \end{cases}$$

где $u_0^0(t|\tau, z)$, $t = \tau, \dots, T_1 - 1$, — оптимальное управление в составе $\pi_1^0(\tau, z)$, — решение задачи (2); $u_1^0(t|\tau, z)$, $t = \tau, \dots, T - 1$, — оптимальное управление задачи (3) для позиции (τ, z).

Для построения реализации $u^*(\tau) = u^0(\tau, x^*(\tau))$, $\tau = 0, 1, \dots, T-1$, в реальном времени [1] оптимальной замыкаемой обратной связи вдоль реализующейся в каждом конкретном процессе управления траектории $x^*(\tau)$, $\tau = 0, 1, \dots, T - 1$, необходимо быстро строить оптимальные стратегии $\pi_1^0(\tau, x^*(\tau))$, $\tau \in \Delta_0$, т.е. решать задачи вида (2). В докладе будет показано, как эти задачи сводятся к задачам линейного программирования и как осуществляется коррекция предыдущего решения $u_0^0(\cdot|\tau-1, x^*(\tau-1))$ для быстрого построения текущего решения $u_0^0(\cdot|\tau, x^*(\tau))$.

Библиографические ссылки

1. *Балашевич Н.В., Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Построение оптимальных обратных связей по математическим моделям с неопределенностью // Журн. вычислит. матем. и матем. физики, 2004. Т. 44. № 2. С. 265–286.
2. *Kostyukova O., Kostina E.* Robust optimal feedback for terminal linear-quadratic control problems under disturbances // Mathematical programming, 2006. Vol. 107. Issue 1–2. P. 131–153.
3. *Kastsiukevich D.A., Dmitruk N.M.* A method for constructing an optimal control strategy in a linear terminal problem // Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics. 2021. No. 2.

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С НЕЛОКАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

Г.Ф. Кулиев, Х.Т. Тагиев

Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджан
{hamletquliyev51, tagiyevht}@gmail.com

В работе рассматривается задача определения пары функций $(u(x,t),\vartheta(x)) \in W_2^1(Q) \times V$ из условий

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \vartheta(x)u = f(x,t),\ (x,t) \in Q = (0,\ell) \times (0,T) \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = u_1(x), x \in (0,\ell) \tag{2}$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial u(\ell,t)}{\partial x} = \int\limits_0^\ell K(x)u(x,t)dx,\ (x,t) \in Q = (0,\ell) \times (0,T) \tag{3}$$

$$\int\limits_0^T R(x,t)u(x,t)dt = \varphi(x) \tag{4}$$

$$V = \Big\{\vartheta(x) \in W_2^1(0,\ell) : \nu_0 \le \vartheta(x) \le \mu_0,$$

$$\left|\frac{d\vartheta}{dx}\right| \le M,\ \text{почти всюду на } (0,\ell)\Big\} \tag{5}$$

где T, M — заданные положительные числа, ν_0, μ_0 — заданные числа, $f \in L_2(Q)$, $u_0 \in W_2^1(0,\ell)$, $u_1 \in L_2(0,\ell)$, $R \in L_\infty(Q), \varphi \in L_2(0,\ell)$ — заданные функции и $\int\limits_0^\ell K^2(x)dx < \infty$.

Задаче (1)-(5) сопоставляется следующая задача оптимального управления: требуется минимизировать функционал

$$I(\vartheta) = \frac{1}{2}\int\limits_0^\ell \left[\int\limits_0^T R(x,t)u(x,t;\vartheta)dt - \varphi(x)\right]^2 dx + \frac{\alpha}{2}\int\limits_0^\ell |\vartheta(x|^2 dx \qquad (6)$$

при условиях (1)-(3), (5), где $u = u(x,t) = u(x,t;v)$ — решение краевой задачи (1)-(3) соответствующее функцию $v = v(x) \in V$.

В работе доказывается непрерывная дифференцируемость по Фреше функционала (6) и выводится необходимое условие оптимальности в виде вариационного неравенства.

Библиографические ссылки

1. *Кабанихин С.И.* Обратные и некорректные задачи. Новосибирск, 2009, 457с.
2. *Guliyev H.F., Tagiev H.T.* An optimal control problem with non-local conditions for the weakly nonlinear hyperbolic equation // Optimal control applications and methods. 2013. Vol. 34. Issue 2. P. 216–235.

К ИНТЕГРИРОВАНИЮ УРАВНЕНИЯ МАТЬЕ С ЗАТУХАНИЕМ В МОНОГРАФИИ Н.Н. БОГОЛЮБОВА И Ю.А. МИТРОПОЛЬСКОГО "АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ"

А.Ф. Курин

Воронежский госуниверситет, Воронеж, Россия
afkurin@mail.ru

Введение. В монографии [1] рассмотрено, в частности, уравнение Матье с затуханием, для которого на плоскости параметров уравнения вычислены границы трех областей параметрического резонанса (формулы (17.62)–(17.64) в [1]). При этом авторы ограничивались тем приближением асимптотического метода, в котором появляется та или иная область резонанса: указанные три формулы получены в первом, втором и третьем приближениях соответственно. Отметим, что в монографии отсутствуют какие-либо подробности вывода формул.

В настоящей работе уравнение Матье интегрируется асимптотическим методом, принятым в монографии [1], сохранены также обозначения величин. Амплитуда и фаза колебаний имеет вид разложения по степеням малого параметра ε. Однако теперь предусмотрена возможность в полученных выражениях устанавливать порядок малости параметров, входящих в уравнение, поскольку, как показал анализ, для существования каждой области параметрических колебаний требуется своя комбинация порядков малости трех параметров. Справедливость полученных выражений для границ второй и третьей областей резонанса подтверждается численным решением уравнения Матье с затуханием. Эти выражения отличаются от формул в [1].

В настоящей работе границы всех трех областей найдены в третьем приближении асимптотического метода.

1. Преобразование уравнения Матье. В обозначениях работы [1] запишем уравнение Матье с затуханием (см. (17.61) в [1])

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \delta\frac{dx}{dt} + \omega^2\left[1 - h\cos(\nu t)\right]x = 0. \tag{1}$$

Рассматриваются резонансы, когда близки частоты ω и $p\nu/q$. Здесь p и q - взаимно простые числа. Частоты связаны соотношением $\omega^2 = (p\nu/q)^2 + \varepsilon\Delta_1 + \varepsilon^2\Delta_2 + \varepsilon^3\Delta_3 + \cdots$, где ε - малый параметр. Малыми величинами являются также затухание $\delta = \varepsilon\delta_1 + \varepsilon^2\delta_2 + \varepsilon^3\delta_3 + \cdots$ и параметр $h = \varepsilon h_1$. В отличие от [1] представление частотной расстройки и коэффициента затухания рядом по степеням ε позволяет выбирать порядок малости этих величин при анализе полученных формул.

Как в [1], после разложения левой и правой частей уравнения (1) по степеням ε следуют дифференциальные уравнения первого, второго и третьего приближений асимптотического метода.

2. Границы областей параметрического резонанса. В результате вычислений на плоскости параметров $((2\omega/\nu)^2,\ h)$ (как в [1]) получаем границы трех областей параметрического резонанса в третьем приближении: в случае $\omega \approx \nu/2$ -

$$\left(\frac{2\omega}{\nu}\right)^2 = 1 \pm \sqrt{\frac{h^2}{4} - \frac{4\delta^2}{\nu^2}} + \frac{7h^2}{32} \pm \frac{\dfrac{39h^4}{1024} - \dfrac{9h^2\delta^2}{32\nu^2}}{\sqrt{\dfrac{h^2}{4} - \dfrac{4\delta^2}{\nu^2}}}, \tag{2}$$

при $\omega \approx \nu$ -
$$\left(\frac{2\omega}{\nu}\right)^2 = 4 + \frac{2h^2}{3} \pm \sqrt{h^4 - \frac{16\delta^2}{\nu^2}}, \tag{3}$$
если $\omega \approx 3\nu/2$ -
$$\left(\frac{2\omega}{\nu}\right)^2 = 9 + \frac{81h^2}{64} \pm \sqrt{\left(\frac{81}{64}\right)^3 h^6 - \frac{36\delta^2}{\nu^2}}. \tag{4}$$

В формуле (2) первые два слагаемых описывают границу в первом приближении. Они совпадают с (17.62) в [1]. Формула (3) отличается от (17.63) в [1] числовым множителем при δ^2. Там вместо 16 стоит 64. Выражение (4) не совпадает с (17.64) в [1], где под корнем при δ^2 стоит множитель 324.

Отметим, что уравнение Матье, взятое в виде $\ddot{x} + \delta\dot{x} + [a + q\cos(2t)]\,x = 0$, решено в [2] асимптотическим методом усреднения. Если в уравнении (1) положить $\nu = 2$ и перейти к параметрам (a, q), из (2)-(4) для границ областей резонанса на плоскости этих параметров получим формулы работы [2].

Библиографические ссылки

1. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
2. *Беломытцева Е.Г., Курин А.Ф., Туленко Е.Б.* Задача Коши для уравнения Матье с затуханием при параметрическом резонансе// Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. 2018. № 3. С. 105–125.

ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ДИСКРЕТНЫХ 2D СИСТЕМ

Г.А. Курина

Воронежский госуниверситет, Воронеж, Россия

Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" РАН, Москва, Россия

kurina@math.vsu.ru

Обратная задача вариационного исчисления состоит в следующем. Требуется найти функционал, для которого данное уравнение является необходимым условием экстремума этого функционала. Подобная задача для системы дискретных уравнений рассматривалась в [1].

Разрешимость обратной задачи позволяет использовать для решения уравнения вариационные методы.

Здесь рассматривается дискретная 2D система вида

$$\begin{aligned} &A_{ij}(x_{(i+1)j}, x_{ij}, x_{i(j+1)}) + B_{ij}(x_{ij}, x_{(i-1)j}, x_{(i-1)(j+1)}) + \\ &+ C_{ij}(x_{(i+1)(j-1)}, x_{i(j-1)}, x_{ij}) = 0, i = \overline{1, m-1}, j = \overline{1, n-1}, \end{aligned} \tag{1}$$

где функции A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} непрерывно дифференцируемы и известны значения

$$\begin{aligned} &x_{i0},\ i = \overline{1, m-1}, \quad x_{0j},\ j = \overline{1, n-1}, \\ &x_{in},\ i = \overline{0, m-1}, \quad x_{mj},\ j = \overline{0, n-1}. \end{aligned} \tag{2}$$

Теорема 1. *Необходимое условие экстремума для функционала*

$$J = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} V_{ij}(x_{(i+1)j}, x_{ij}, x_{i(j+1)}), \tag{3}$$

где V_{ij} *- дважды непрерывно дифференцируемые функции, а значения* (2) *и* x_{00} *заданы, имеет вид системы* (1) *с* $A_{ij} = \partial V_{ij}/\partial x_{ij}, B_{ij} = \partial V_{(i-1)j}/\partial x_{ij}, C_{ij} = \partial V_{i(j-1)}/\partial x_{ij}$*, при этом выполняются условия*

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_{i(j-1)}}{\partial x_{ij}} &= \frac{\partial C_{ij}}{\partial x_{i(j-1)}},\ i = \overline{1, m-1},\ j = \overline{2, n-1}, \\ \frac{\partial A_{(i-1)j}}{\partial x_{ij}} &= \frac{\partial B_{ij}}{\partial x_{(i-1)j}},\ i = \overline{2, m-1}, j = \overline{1, n-1}, \\ \frac{\partial B_{(i+1)(j-1)}}{\partial x_{ij}} &= \frac{\partial C_{ij}}{\partial x_{(i+1)(j-1)}},\ i = \overline{1, m-2}, j = \overline{2, n-1}. \end{aligned} \tag{4}$$

Обратно, если для системы (1) *выполняются условия* (4)*, то эта система является необходимым условием экстремума для функционала вида* (3)*, где в качестве* $V_{00}(x_{10}, x_{00}, x_{01})$ *может быть взята любая постоянная, а*

$$\begin{gathered} V_{i0} = \int_0^{x_{i1}} C_{i1}(x_{(i+1)0}, x_{i0}, x_{i1}) dx_{i1},\ i = \overline{1, m-1}, \\ V_{0j} = \int_0^{x_{1j}} B_{1j}(x_{1j}, x_{0j}, x_{0(j+1)}) dx_{1j},\ j = \overline{1, n-1}, \\ V_{ij} = \\ = \int_0^{x_{ij}} A_{ij}(x_{(i+1)j}, x_{ij}, x_{i(j+1)}) dx_{ij} + \int_0^{x_{(i+1)j}} B_{(i+1)j}(x_{(i+1)j}, 0, 0) dx_{(i+1)j} + \\ + \int_0^{x_{i(j+1)}} C_{i(j+1)}(x_{(i+1)j}, 0, x_{i(j+1)}) dx_{i(j+1)},\ i = \overline{1, m-2},\ j = \overline{1, n-2}, \end{gathered}$$

$$V_{i(n-1)} = \int_0^{x_{i(n-1)}} A_{i(n-1)}(x_{(i+1)(n-1)}, x_{i(n-1)}, x_{in})dx_{i(n-1)} +$$
$$+ \int_0^{x_{(i+1)(n-1)}} B_{(i+1)(n-1)}(x_{(i+1)(n-1)}, 0, x_{in})dx_{(i+1)(n-1)},\ i = \overline{1, m-2},$$
$$V_{(m-1)j} = \int_0^{x_{(m-1)j}} A_{(m-1)j}(x_{mj}, x_{(m-1)j}, x_{(m-1)(j+1)})dx_{(m-1)j} +$$
$$+ \int_0^{x_{(m-1)(j+1)}} C_{(m-1)(j+1)}(x_{mj}, 0, x_{(m-1)(j+1)})dx_{(m-1)(j+1)},\ j = \overline{1, n-2},$$
$$V_{(m-1)(n-1)} =$$
$$= \int_0^{x_{(m-1)(n-1)}} A_{(m-1)(n-1)}(x_{m(n-1)}, x_{(m-1)(n-1)}, x_{(m-1)n})dx_{(m-1)(n-1)}.$$

Приводятся иллюстрирующие примеры.

Заметим, что функционал вида (3) возникает при дискретизации двойного интеграла по прямоугольнику с подынтегральной функцией, зависящей от частных производных первого порядка.

Как показано в [1], в общем случае нет связи между разрешимостью обратной задачи вариационного исчисления и разрешимостью обратной задачи оптимизации для соответствующего дискретного по времени аналога.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 21-11-00202).

Библиографические ссылки

1. *Kurina G., Zadorozhniy V.* Inverse problems of the calculus of variations for discrete-time systems // Pure and Applied Functional Analysis. 2016. Vol. 1. No. 4. P. 573–582.

ГЛОБАЛЬНАЯ АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

А.А. Леваков, М.М. Васьковский

Белорусский государствнный университет, Минск, Беларусь
levakov@tut.by, vaskovskii@bsu.by

Пусть заданы ограниченные полунепрерывные сверху многозначные отображения $F: R^d \to \mathrm{conv}\,(R^d)$, $G: R^d \to \mathrm{cl}\,(R^{d\times d})$, $0 \in F(0)$, $0 \in G(0)$. Рассмотрим стохастическое дифференциальное включение

$$dx(t) \in F(x(t))dt + G(x(t))dW(t), \tag{1}$$

где $W(t)$ – d-мерное броуновское движение. Построим многозначное отображение $x \to A(x) = \{bb^\top : b \in G(x)\}$. Пусть $A(x) \in$

$\operatorname{conv}(R^{d\times d})$ $\forall x \in R^d$. Предполагаем, что выполняется следующее **условие 1)**: существует дважды непрерывно дифференцируемая функция $V : R^d \to R_+$ такая, что

$$DV(x) = \sup_{b\in F(x)} \frac{\partial V(x)}{\partial x} b + \sup_{a\in A(x)} \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} a\right) \le 0 \ \forall x \in R^d.$$

Положим $N_V = \{x \in R^d : DV(x) = 0\}$. Будем говорить, что слабое решение $x(t), t \in R$, определенное на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, принадлежит множеству N_V, если

$$\frac{\partial V(x(t))}{\partial x} v(t) + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\frac{\partial^2 V(x(t))}{\partial x^2} u(t)u^\top(t)\right) = 0$$

для $(\mu \times P)$-почти всех $(t, \omega) \in R \times \Omega$.

Пусть $\mathcal{P}$ — совокупность всех вероятностей на $(R^d, \beta(R^d))$, d — метрика Леви–Прохорова на $\mathcal{P}$, $x(t)$— слабое решение включения (1), $P^{x(t)}$— распределение вероятностей случайной величины $x(t)$. Отображение $\varphi_x : R_+ \to \mathcal{P}$, где $\varphi_x(t) = P^{x(t)}$, называем *движением* включения (1), соответствующим слабому решению $x(t)$, а множество $\varphi_x(R_+) = \{y \in \mathcal{P} : y = \varphi_x(t),\ t \in R_+\}$— *траекторией движения* φ_x.

Точку q называем *ω-предельной* для движения $\varphi_x : [t_0, +\infty) \to \mathcal{P}$, если существует последовательность $t_n \to +\infty$ такая, что $d(\varphi_x(t_n), q) \to 0$, $n \to +\infty$. Обозначим через $\Omega(\varphi_x)$ множество всех ω-предельных точек для движения φ_x. Движение называется *предкомпактным*, если его траектория относительно компактна в $(\mathcal{P}, d)$.

Лемма 1. *Пусть слабому решению $x(t)$ включения* (1) *соответствует предкомпактное движение φ_x, $\|x(0)\| \le K$ п. н., $K \in R_+$. Тогда выполнены утверждения:* 1) *множество $\Omega(\varphi_x)$ непусто и для любой точки $b \in \Omega(\varphi_x)$ существует слабое решение $\hat{x}(t)$ на R включения* (1)*, принадлежащее множеству M_V такое, что $P^{\hat{x}(0)} = b$;* 2) $d(\varphi_x(t), \Omega(\varphi_x)) \to 0$ *при* $t \to +\infty$; 3) $x(t) \underset{t\to\infty}{\xrightarrow{P}} \overline{\mathrm{supp}\ \ \Omega(\varphi_x)}$.

Определение 1. *Нулевое решение называют устойчивым по вероятности, если для любых $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ существует $\delta(\varepsilon_1, \varepsilon_2) > 0$ такое, что для любого слабого решения $x(t)$ с $\|x(0)\| \le \delta$ п. н. имеем $P\{\sup_{t\ge 0} \|x(t)\| \ge \varepsilon_1\} \le \varepsilon_2$.*

Определение 2. *Нулевое решение называется глобально асимптотически устойчивым по вероятности, если: а) оно устойчиво по вероятности; б) для любого $K > 0$, для любого слабого решения $x(t)$, для которого $\|x(0)\| < K$ п. н., выполняется $x(t) \underset{t\to\infty}{\xrightarrow{P}} 0$.*

Определение 3. *Нулевое решение называется ϖ-устойчивым, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого слабого решения $x(t)$ уравнения, для которого $\|x(0)\| \leq \delta$ п. н., имеем $E(\|x(t)\|^{\varpi}) \leq \varepsilon \ \forall t \geq 0$.*

Определение 4. *Нулевое решение называется глобально асимптотически (ϖ, ϖ_1)-устойчивым, если: а) оно ϖ-устойчиво; б) для любого $K > 0$, для любого слабого решения $x(t)$, для которого $\|x(0)\| \leq K$ п. н., выполняется $\lim\limits_{t\to+\infty} E(\|x(t)\|^{\varpi_1}) = 0$.*

Теорема 1. *Пусть для включения* (1) *выполняется условие* l), *и пусть функция $V(x)$ в этом условии положительно определенная. Тогда нулевое решение включения* (1) *устойчиво по вероятности. Если, кроме того, $V(x) \to \infty$ при $\|x\| \to \infty$, и множество N_V не содержит ненулевых слабых решений на R, то нулевое решение глобально асимптотически устойчиво по вероятности.*

Теорема 2. *Пусть для включения* (1) *выполняется условие* l), *и функция $V(x)$ в этом условии удовлетворяет неравенствам: $k\|x\|^{\varpi_1} \leq V(x) \ \forall x, \|x\| \geq a$; $k_1\|x\|^{\varpi} \leq V(x) \ \forall x, \|x\| \leq b$, где $\varpi, \varpi_1, k, k_1, a, b$ — положительные постоянные. Если не существует ненулевых слабых решений на R включения* (1), *принадлежащих множеству N_V, то нулевое решение является глобально асимптотически (ϖ, ϖ_1)-устойчивым.*

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ РАЗГОНА ЛЫЖНИКА НА ПРЯМОЛИНЕЙНОМ СКЛОНЕ

Б.Я. Локшин, В.А. Самсонов

НИИ механики МГУ, Москва, Россия

{blokshin, samson}@imec.msu.ru

Введение. Первым этапом в спортивных соревнованиях по прыжкам с трамплина является разгон лыжника до момента отталкивания. В процессе этого разгона лыжник принимает определенную позу и старается поддерживать ее в процессе спуска при возрастающей скорости за счет вырабатываемых моментов в суставах. Построение модели движения лыжника именно по прямолинейному склону представляет определенный интерес как с практической точки зрения, так и в качестве теоретико-механической задачи. В имеющейся научной литературе лыжника обычно представляют как материальную точку [1 – 3] и рассматриваются некоторые задачи относительно ее движения. Например, в [2, 3] рассматриваются задачи быстродействия по разгону лыжника до некоторой заданной конечной скорости за счет управления лобовым сопротивлением. Для решения этих оптимальных задач используется принцип максимума Понтрягина [2] или метод Миеле [3].

1. Предлагаемая модель. В настоящем сообщении предлагается представить лыжника как систему твердых тел. Одно из них — это корпус, скользящий одной своей точкой по поверхности склона и имеющий возможность совершать поворот относительно нее. Центр масс корпуса находится на некотором расстоянии от точки опоры. В центре масс первого тела размещается другое твердое тело типа крыла, которое имитирует изменяемую форму корпуса. Считается, что все аэродинамическое воздействие сосредоточено именно на этом теле (крыле), для описания этого воздействия используется хорошо зарекомендовавшая себя в ряде других задач квазистатическая модель обтекания [4]. Выбор желаемого режима движения происходит за счет управляющего момента, приложенного в точке контакта корпуса с поверхностью и за счет изменения ориентации (установочного угла) крыла. Решение соответствующих дифференциальных уравнений при заданных зависимостях управляющего момента и установочного угла крыла полностью определяет режим движения в процессе спуска: не только скорость спуска, как это было в предыдущих моделях с материальной точкой, но и угол стойки и наклона корпуса.

2. Спуск с постоянным углом наклона корпуса. Подробно рассмотрен вопрос о движении тела при условии, что в процессе спуска угол наклона корпуса сохраняется. В этом случае оказывается, что направление вектора скорости центра масс тоже не изменяется и совпадает с направлением склона. Постоянство угла наклона корпуса накладывает определенное ограничение на выбор изменяющегося в процессе спуска управляющего момента. Предложен закон изменения управляющего момента в виде обратной связи, обеспечивающий асимптотическую устойчивость выбранного режима спуска. Показано, что существует некоторое постоянное значение установочного угла крыла, при котором достигается максимальное значение скорости спуска в любой момент времени. Тем самым решаются и сформулированные в [2, 3] задачи быстродействия. Отметим, что это экстремальное значение установочного угла не зависит ни от геометрических размеров, ни от площади корпуса и крыла, ни от скорости спуска, ни от выбранного угла наклона корпуса, ни от времени – оно зависит только от аэродинамических характеристик силового воздействия. При этом скорость спуска также не зависит от выбранного угла наклона корпуса. От этого угла зависит только величина управляющего момента.

Таким образом, оптимальный разгон лыжника на прямолинейном участке спуска достигается при некотором фиксированном положении корпуса. Реализация этого режима спуска связана только с возможностями лыжника осуществлять полученный закон изменения управляющего момента.

Библиографические ссылки

1. *Подгаец А.Р., Рудаков Р.Н.* Биомеханические проблемы прыжка на лыжах с трамплина // Russian J. Biomechanics. 2000. Vol. 4. No. 2. P. 1–11.
2. *Remizov L.P.* Optimal running on skis in downhill // J. Biomechanics. 1980. Vol. 13. No. 11. P. 941–945.
3. *Maronski R.* On optimal running downhill on skis // J. Biomechanics. 1990. Vol. 23. No. 5. P. 435–439.
4. *Локшин Б.Я., Самсонов В.А.* Задача о движении тела в сопротивляющейся среде. М.: изд. МГУ, 2012.

УПРАВЛЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЯМИ ЛЯПУНОВА ВПОЛНЕ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

Е.К. Макаров[1], С.Н. Попова[2]

[1] Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь
jcm@im.bas-net.by

[2] Удмуртский государственный университет, Ижевск, Россия
udsu.popova.sn@gmail.com

Рассмотрим линейную управляемую систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad t \geq 0, \tag{1}$$

с кусочно-непрерывными и ограниченными матрицами коэффициентов A и B. Через $X(t,s)$, $t,s \geq 0$, обозначим матрицу Коши соответствующей свободной системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0. \tag{2}$$

Система (1) называется равномерно вполне управляемой [1], если существуют такие положительные числа ϑ и α, что при всех $t \geq 0$, $h \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство $h^T W(t, t+\vartheta) h \geqslant \alpha_2 \|h\|^2$, где

$$W(t,s) = \int_t^s X(t,\tau)B(\tau)B^T(\tau)X^T(t,\tau)\,d\tau -$$

матрица управляемости Калмана [1].

Пусть управление u формируется по принципу линейной обратной связи $u = U(t)x$, где матрица коэффициентов обратной связи (матричное управление) тоже кусочно-непрерывна и ограничена. Тогда замкнутая система

$$\dot{y} = (A(t) + B(t)U(t))y, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \tag{3}$$

будет представлять собой линейную дифференциальную систему с ограниченными кусочно-непрерывными коэффициентами, и поэтому для нее будут определены все ляпуновские инварианты (инварианты преобразований Ляпунова) и, в том числе, характеристические показатели, которые мы обозначим через $\lambda_1(A+BU) \leq \ldots \leq \lambda_n(A+BU)$.

Будем говорить, что показатели системы (3) глобально управляемы в некотором классе матричных управлений, если при любом заданном наборе вещественных чисел μ_k, $k = 1, \ldots, n$, таком что $\mu_1 \leq \ldots \leq \mu_n$, выбором матричного управления U из заданного класса можно добиться выполнения равенств $\lambda_k(A+BU) = \mu_k$ для всех $k = 1, \ldots, n$.

В теории управления асимптотическими инвариантами линейных дифференциальных систем хорошо известен [2, с. 337] следующий результат: *если система* (1) *равномерно вполне управляема, а матрица B кусочно равномерно непрерывна (то есть представима в виде суммы равномерно непрерывной и кусочно-постоянной матриц* [2, с. 264]), *то характеристические показатели системы* (3) *глобально управляемы с помощью кусочно-непрерывного ограниченного матричного управления U.*

Для вполне управляемых систем, не удовлетворяющих условиям определения равномерной полной управляемости, аналогичный результат отсутствует, несмотря на то, что имеется ряд результатов о стабилизации таких систем (см. например [3]), которую можно рассматривать как управление старшим показателем системы.

Будем говорить, что последовательность t_k, $k \in \mathbb{N}$, удовлетворяет условию медленного роста, если выполнено условие $\lim\limits_{k\to\infty} t_{k+1}/t_k = 1$.

Теорема 1. *Пусть система* (1) *вполне управляема, система* (2) *диагонализируема, а матрица B кусочно равномерно непрерывна. Если существует монотонно возрастающая к $+\infty$ последовательность t_k, $k \in \mathbb{N}$, положительных вещественных чисел, удовлетворяющая условию медленного роста, такая что для некоторого $\gamma > 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$ и всех $h \in \mathbb{R}^n$ выполнены неравенства*

$h^T W(t_k, t_{k+1})h \geqslant \gamma(t_{k+1} - t_k)\|h\|^2$, *то характеристические показатели системы* (3) *глобально управляемы.*

Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке БРФФИ, договор № Ф20Р-005. Исследования второго автора выполнены при поддержке РФФИ (грант 20-01-00293) и Минобрнауки РФ в рамках государственного задания № 075-00232-20-01, проект FEWS-2020-0010.

Библиографические ссылки

1. *Kalman R.E.* Contribution to the theory of optimal control // Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana. 1960. Vol. 5. No. 1. P. 102–119.
2. *Макаров Е.К., Попова С.Н.* Управляемость асимптотических инвариантов нестационарных линейных систем. Минск: Беларус. навука, 2012.
3. *Anderson B.D.O., Ilchmann A., Wirth F.R.* Stabilizability of Linear Time-Varying Systems // Systems & Control Letters 2013. Vol. 62. No. 9. P. 747–755.

КОНФЛИКТНАЯ ДИНАМИКА В ОБОБЩЕННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

О.А. Малафеев[1], И.В. Зайцева[2,3], Н.Д. Рединских[1]

[1] Санкт-Петербургский государственный университет,
Санкт-Петербург, Петергоф, Россия
o.malafeev@spbu.ru

[2] Российский государственный гидрометеорологический университет, Россия

[3] Ставропольский государственный аграрный университет, Россия

Введение. В работе формализуется определение бескоалиционной однократной игры $\Gamma = \langle I = \{1, ..., n\}, \{\Phi_i\}_1^n, \{H_i\}_1^n \rangle$ с независимым выбором игроками стратегий и строящихся по ней n-ходовых игр $\Gamma_p = \Gamma_i$, с порядком ходов $p = (i_1, i_2, ..., i_n = i)$, с теми же функциями выигрыша и множеством выборов Φ_i. Формулируется утверждение о равновесной ситуации [1] в игре Γ, если $\overline{\varphi}$ есть равновесный выбор игроков в n-ходовой игре Γ_i при всяком $i \in I$.

Постановка задачи. Пусть $\mathcal{F}$ — обобщенная динамическая система [2] в полном локально компактном метрическом пространстве X, задаваемая посредством функции достижимости $F(x_0, t_0, t)$. n-*Параметрическим управлением* в этой системе назовем совокупность

$$M = \big\{\{U_i[x_0, t_0, t]\}_1^n,\ \pi[x_0, t_0, t], *\big\},$$

где $U_i[\cdot]$ — непустое множество при $x_0 \in X$; $t_0, t \in R_1^+$, $t_0 \le t$; $\pi[\cdot] : U[\cdot] = \prod_{i=1}^n V_i[\cdot] \to \widehat{F}(\cdot)$, $\pi[\cdot]$ — однозначное эпиморфное отображение; $*$ — операция, сопоставляющая всяким совместным элементам $u^1[x_0, t_0, t_1] \in U[\cdot]$, $u^2[x_1, t_1, t_2] \in U[\cdot]$ (т. е. таким, что $\pi[x_0, t_0, t_1](u^1)(t_1) = x_1$) элемент $u^1 * u^2 = u^3 \in U[x_0, t_0, t_2]$ таким образом, что

$$\pi[x_0, t_0, t_2](u^3)(t) \begin{cases} \pi[x_0, t_0, t_1](u^1)(t), & t \in [t_0, t_1], \\ \pi[x_1, t_1, t_2](u^2)(t), & t \in [t_1, t_2]. \end{cases}$$

Пару $\mathcal{D} = (\mathcal{F}, M)$ назовем *динамикой n-зависимых движений.*

Рассмотрим бескоалиционную однократную игру $\Gamma = \langle I = \{1, ..., n\}, \{\Phi_i\}_1^n, \{H_i\}_1^n \rangle$ с независимым выбором игроками стратегий φ_i и строящиеся по ней n-ходовые игры $\Gamma_p = \Gamma_i$, с порядком ходов $p = (i_1, i_2, ..., i_n = i)$, с теми же функциями выигрыша и множеством выборов Φ_i. Обозначим через $\mathcal{E}_\Gamma$ ($\mathcal{E}_{\Gamma_i}$) множество равновесных наборов в игре Γ (Γ_i) и отождествим выбор φ_j со стратегией игрока в игре Γ_p. Также отметим, что в действительности *стратегией игрока i_k* следует в игре Γ_p назвать отображение $\prod_{l=1}^{k-1} \Phi_{i_l} \to \Phi_{i_k}$, а набор φ следует назвать *исходом соответствующей ситуации.* Получим следующее утверждение.

Утверждение 1. *Ситуация $\overline{\varphi}$ является равновесной в игре Γ, если $\overline{\varphi}$ есть равновесный выбор игроков в n-ходовой игре Γ_i при всяком $i \in I$ (т. е. если все игроки, кроме i, выбирали $\{\overline{\varphi}_j\}_{j \ne i}$, то игроку i не выгодно отклоняться от φ_i).*

Отсюда получаем следствие:

Следствие Множество равновесных наборов $\mathcal{E}_\Gamma \ne \emptyset$, если $\bigcap\limits_I \mathcal{E}_{\Gamma_i} \ne \emptyset$. Для многошаговой игры $\Gamma_p^\sigma(x_0, T)$ имеют место рекуррентные стандартные соотношения динамического программирования, связывающие значения функций выигрыша в равновесных ситуациях для N-шаговой игры с таковыми для $(N-1)$-шаговой игры (при фиксированной ветви val_i). Обозначив через ${}^\sigma V_j^i(x, T)$ значение функции выигрыша игрока j в игре $\Gamma_i^\sigma(x, T)$ в равновесной ситуации и положив ${}^\sigma V^i(\cdot) = \{{}^\sigma V_j^i\}_{j=1}^n$, будем записывать эти соотношения в следующем виде:

$${}^\sigma V(x_0, T) = \tag{1}$$

$$\mathrm{val}^i_{u^1(\cdot)} \left({}^\sigma V^i \left(x_0 + \int_0^{t_1} f(x(t), u^1(t))\, dt \right), T - t_1 \right) {}^\sigma V^i(x, 0) = H(x).$$

Можно доказать, что в дифференциальных играх с независимыми движениями у всех n игроков существуют ситуации равновесия [3], причем понятно, что функция $V(x,T)$ значения выигрышей игроков в равновесных ситуациях в общем случае многозначна. Поэтому ясно, что и в рассматриваемом более общем случае функция

$$V^i = \lim_{|\sigma|\to 0} {}^{\sigma}V^P(\cdot) = V^P(\cdot)$$

также, вообще говоря, многозначна.

Библиографические ссылки

1. *Малафеев О.А.* Ситуации равновесия в динамических играх. Кибернетика. 1974. № 3. С. 111–118.
2. *Малафеев О.А., Зубова А.Ф., Новожилова Л.М.* Математическое моделирование сложных систем. СПб.: Изд. Санкт-Петербургского университета, 1999.
3. *Малафеев О.А.* Управляемые конфликтные системы. СПб.: Изд. Санкт-Петербургского университета, 2000.

О ЛИНЕЙНОЙ МАКСИМИННОЙ ЗАДАЧЕ СО СВЯЗАННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

А.Р. Маматов

Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан
akmm1964@rambler.ru

Наиболее трудным при разработки алгоритмов решения многоэкстремальных задач является составление блока алгоритма, осуществляющей переход с одного локального оптимального плана на другой план, при которой значение целевой функции задачи улучшается.

Наряду с прямыми методами исследования экстремальных задач, важную роль играют двойственные методы [1, 2], которые во многих случаях открывают дополнительную возможность для перехода к лучшему плану по значению целевой функции, что невозможно или трудно при исследование рассматриваемых задач прямыми методами.

В данной работе для линейной максиминной задачи со связанными переменными [2, 3, 4]

$$\varphi(x) = \min_{y\in Y(x)} (c'x + d'y) \to \max_{x\in X},$$

здесь $X = \{x \mid f_* \le x \le f^*\}$, $Y(x) = \{y \mid g_* \le y \le g^*, Ax + By = b\}$, $c = c(J)$, $x = x(J)$, $f_* = f_*(J)$, $f^* = f^*(J)$ – n-векторы, $d = d(K)$,

$y = y(K)$, $g_* = g_*(K)$, $g^* = g^*(K)$ – l-векторы, $b = b(I)$– m-векторы, $A = A(I,J)$, $B = B(I,K)$ соответственно $m \times n$ и $m \times l$ матрицы; $rankB = m < l$, $I = \{1,2,...,m\}$, $J = \{1,2,...,n\}$, $K = \{1,2,...,l\}, \forall x \in X, Y(x) \neq \emptyset$, предлагается новые результаты численных экспериментов на ПЭВМ по построению планов, удовлетворяющий необходимым условиям оптимальности "высокого порядка" [3].

Библиографические ссылки

1. *Габасов Р., Кириллова Ф.М., Тятюшкин А.И.* Конструктивные методы оптимизации. Ч.1. Линейные задачи. Мн.: Университетское, 1984.
2. *Маматов А.Р.* Двойственный алгоритм вычисления локального оптимума одной максиминной задачи со связанными переменными // Узбекский журнал Проблемы информатики и энергетики. 2000. № 1. С. 7–12.
3. *Маматов А.Р.* Необходимые условия оптимальности "высокого порядка" в линейной максиминной задаче со связанными переменными // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2010. Т. 50. № 6. С. 1017–1022.
4. *Маматов А.Р.* О линейной максиминной задачи со связанными переменными // Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация: материалы Междунар. науч. конф., посвященной 100-летию со дня рождения академика Е.А. Барбашина; Ф.М.Кириллова (гл. ред.) [и др.]. Минск: БГУ, 2018. С. 155–156.

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ОСОБЫХ В КЛАССИЧЕСКОМ СМЫСЛЕ УПРАВЛЕНИЙ В СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ ГУРСА-ДАРБУ

К.Б. Мансимов[1,2], Р.О. Масталиев[1]

[1] Институт Систем Управления НАН Азербайджана, Баку, Азербайджан
mastaliyevrashad@gmail.com

[2] Бакинский Государственный Университет, Баку, Азербайджан
kamilbmansimov@gmail.com

Для задачи оптимального управления, описываемый стохастической системой Гурса-Дарбу [1], установлены необходимые условия оптимальности первого и второго порядков (уравнение Эйлера, аналог условия Лежандра-Клебша) и исследованы на оптимальность особые в классическом смысле [2–4] управления.

Пусть (Ω, F, P) — некоторое вероятностное пространства; $D = [t_0, t_1] \times [x_0, x_1]$, $y = (t,x) \in D$; $y = (t,x) \leq y' = (t', x')$, если

$t \leq t', x \leq x'$. Поток σ-алгебр $F_y = F_{tx}$ есть семейство σ-алгебр $F_y \in F$, определенных на основном вероятностном пространстве (Ω, F, P), причем, $F_y \subset F'_y$, если $y \leq y'$. E — знак математического ожидания.

Пусть управляемый процесс описывается системой стохастических нелинейных гиперболических уравнений второго порядка

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 z(t,x)}{\partial t \partial x} = f(t,x,z(t,x),z_t(t,x),z_x(t,x),u(t,x)) + \\ + g(t,x,z(t,x),u(t,x)) \frac{\partial^2 W(t,x)}{\partial t \partial x}, (t,x) \in D, \end{gathered} \tag{1}$$

с краевыми условиями типа Гурса

$$\begin{gathered} z(t_0,x) = a(x), x \in [x_0,x_1], \\ z(t,x_0) = b(t), t \in [t_0,t_1], a(x_0) = b(t_0). \end{gathered} \tag{2}$$

Здесь $f(t,x,p,u)$ — заданная n-мерная вектор функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по (p,u) до второго порядка включительно, где $p = (z, z_t, z)'$; $g(t,x,z,u)$ — заданная n-мерная вектор функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по (z,u) до второго порядка включительно; $a(x), b(t)$ — заданные на $[x_0,x_1]$ и $[t_0,t_1]$ соответственно, n-мерные вектор функции, удовлетворяющие условию Липшица; $\frac{\partial^2 W(t,x)}{\partial t \partial x}$ — n-мерный двухпараметрический «белый шум» на плоскости [1, 5].

В качестве множества допустимых управлений выберем совокупность ограниченных и измеримых в прямоугольнике D r-мерных вектор-функций удовлетворяющих ограничениям типа включения вида

$$u(t,x) \in U, (t,x) \in D, \tag{3}$$

где U — заданное непустое ограниченное и открытое множество из пространства R^r.

Решение задачи (1)–(2) понимается в смысле [1, 5], и предполагается, что каждому допустимому управлению $u(t,x)$ соответствует с вероятностью 1 единственное решение $z(t,x)$.

Целью задачи оптимального управления является минимизация многоточечного функционала качества

$$I(u) = E\varphi(z(T_1,X_1), z(T_2,X_2), ..., z(T_k,X_k)), \tag{4}$$

определенного на решениях задачи (1)–(2) при допустимых управлениях (3).

Здесь $\varphi(z)$ — заданная дважды непрерывно дифференцируемая скалярная функция, а $(T_i, X_i), i = \overline{1,k}$ $(t_0 < \mathrm{t}_1 < T_2 < ... < T_k \leq t_1; x_0 < X_1 < X_2 < ... < X_k \leq x_1)$ — заданные точки.

В предлагаемой работе методом приращений вычислены первая и вторая вариаций (в классическом смысле) функционала качества и с их помощью установлены необходимые условия оптимальности в форме аналога уравнения Эйлера, и типа Лежандра-Клебша. Отдельно исследован случай вырождения аналога условия Лежандра-Клебша (классически особый случай). Получены необходимые условия оптимальности особых в классическом смысле управлений типа [2–4].

Библиографические ссылки

1. *Ермольев Ю.М., Гуленко В.П., Царенко Т.И.* Конечно-разностный метод в задачах оптимального управления. Киев: Наук. думка, 1978. 164 с.
2. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Особые оптимальные управления. М.: Книжный дом «Либроком», 2013. 256 с.
3. *Мансимов К.Б.* Необходимые условия оптимальности особых процессов в задачах оптимального управления // Автореф. дисс. на соиск.ученой степени д-ра физ.-мат. наук. Баку, 1994. 43 с.
4. *Мансимов К.Б., Марданов М.Дж.* Качественная теория оптимального управления системами Гурса-Дарбу. Баку: Элм, 2010. 360 с.
5. *Пономаренко Л.Л.* Стохастическая бесконечномерная задача Гурса // Математический анализ и теория вероятностей. Киев, 1978. С. 140–143.

ГИДР ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ И НАБЛЮДЕНИЯ С ПОТЕРЕЙ ПАМЯТИ

В.М. Марченко

Белорусский государственный технологический университет, Минск, Беларусь
vladimir.marchenko@gmail.com

В докладе исследуются гибридные интегро-дифференциально-разностные (ГИДР) системы управления с финитными ядрами (потерей памяти). Дается представление их решений в виде обобщенной формулы Коши. Вводится сопряженная система наблюдения. Устанавливается двойственное соотношение и принцип двойственности задач нуль-управляемости и линейной наблюдаемости на продолжении. Для стационарных ГИДР систем получена экспоненциальная оценка решений, что позволяет в частотной области поиск новых регуляторов по типу обратной связи, коэффициенты которых суть целые функции конечной степени, что приводит к ГИДР системам с потерей памяти.

Рассмотрим ГИДР систему управления в нормальной форме с управлением

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) = A_{11}(t)x_1(t) + A_{12}(t)x_2(t) + \int\limits_{t_0}^{t} (D_{11}(t,s)x_1(t_0+t-s) \\ +D_{12}(t,s)x_2(t_0+t-s))\,ds + B_1(t)u(t),\ t > t_0;\end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}x_2(t) = A_{21}(t)x_1(t) + A_{22}(t)x_2(t-h) + \int\limits_{t_0}^{t} (D_{21}(t,s)x_1(t_0+t-s) \\ +D_{22}(t,s)x_2(t_0+t-s))\,ds + B_2(t)u(t),\ t \geq t_0;\end{aligned} \tag{2}$$

с начальными условиями

$$x_1(t_0) = x_1(t_0+0) = x_{10},\, x_2(\tau) = \varphi(\tau),\, \tau \in [t_0-h, t_0). \tag{3}$$

Здесь $x_1(t) \in \mathbb{R}^{n_1}$, $x_2(t) \in \mathbb{R}^{n_2}$, $u(t) \in \mathbb{R}^r$, $h > 0$; параметры $A_{jk}(t)$, $B_j(t)$, $D_{jk}(t,\tau)$, $j = 1,2$; $k = 1,2$; – матричные функции соответствующих размеров, элементы которых являются непрерывными функциями по t и кусочно-непрерывными по τ, причем $D_{jk}(t,s) = 0$, $j = 1,2$; $k = 1,2$, для $s < t_0$ или $s > t_0 + w$ при некотором $w > 0$; управляющее воздействие $u(\cdot)$ – допустимые управление и $\varphi(\cdot)$ – начальное состояние берутся из класса кусочно-непрерывных вектор-функций.

Отметим специфику начальной задачи (3): начальные условия здесь задаются на полуинтервале $[t_0-h, t_0)$, однако вектор-функция φ определена и кусочно-непрерывна (ограничена) на отрезке $[t_0-h, t_0]$, при этом значение $x_2(t_0)$ определяется в силу уравнения (2).

Под решением $x_1(\cdot)$, $x_2(\cdot)$ системы (1), (2), соответствующим начальным условиям (3), будем понимать абсолютно непрерывную n_1-вектор-функцию $x_1(t)$ и кусочно-непрерывную n_2-вектор-функцию $x_2(t)$, которые для всех $t \geq t_0$ удовлетворяют уравнению (2) и для почти всех $t \geq t_0$ удовлетворяют уравнению (3), а также удовлетворяют начальным условиям (3).

Пусть $T_t = [\frac{t-t_0}{h}]$ – целая часть числа $\frac{t-t_0}{h}$, $t > t_0$. Наряду с основной системой (1) – (3) рассмотрим сопряженную систему (с обратным временем $\tau < t$):

$$\begin{aligned}\tfrac{\partial X_1^*(t,\tau)}{\partial\tau} + X_1^*(t,\tau)A_{11}(\tau) + X_2^*(t,\tau)A_{21}(\tau) + \int\limits_{t_0}^{t_0+t-\tau} (X_1^*(t,s+\tau \\ -t_0)D_{11}(s+\tau-t_0,s) + X_2^*(t,s+\tau-t_0)D_{21}(s+\tau-t_0,s))\,ds \\ +\textstyle\sum_{k=0}^{T_t} Z^*(t,t-kh)D_{21}(t-kh,t_0+t-kh-\tau),\end{aligned}$$

$$X_2^*(t,\tau) = X_1^*(t,\tau)A_{12}(\tau) + X_2^*(t,\tau+h)A_{22}(\tau+h) + \int\limits_{t_0}^{t_0+t-\tau} (X_1^*(t,$$
$$s+\tau-t_0)D_{12}(s+\tau-t_0,s) + X_2^*(t,s+\tau-t_0)D_{22}(s+\tau-t_0,s))\,ds$$
$$+\sum\nolimits_{k=0}^{T_t} Z^*(t,t-kh)D_{22}(t-kh,t_0+t-kh-\tau),$$
$$X_1^*(t,t-kh-0) - X_1^*(t,t-kh+0) = Z^*(t,t-kh)A_{21}(t-kh),$$
$$Z^*(t,t-kh) = Z^*(t,t-kh+h)A_{22}(t-kh+h),\ k=1,2,...,T_t;$$
с граничными условиями $X_1^*(t,t-0) = X_{10}^*$, $Z^*(t,t) = Z_0^*$, $X_2^*(t,\tau) = \Phi^*(\tau)$, $\tau > t$.

Теорема 1. *Обобщенная формула Коши: пусть вектор-функции* $x_1(\cdot), x_2(\cdot)$ *являются решением системы* (1) – (3). *Тогда имеют место следующие представления этих решений на основе соответствующих решений сопряженной системы:*
$$X_1^*(t,t_0-0)x_{10} + \int\limits_{t_0-h}^{t_0} X_2^*(t,\tau+h)A_{22}(\tau+h)\varphi(\tau)d\tau + \int\limits_{t_0}^{t} (X_1^*(t,\tau)B_1(\tau)$$
$$+X_2^*(t,\tau)B_2(\tau))\,u(\tau)d\tau + Z^*(t,t-T_th)A_{22}(t-T_th)\varphi(t-T_th-h)$$
$$+\sum\nolimits_{k=0}^{T_t} Z^*(t,t-kh)B_2(t-kh) =$$
$$\begin{cases} x_1(t),\ t\ge t_0, \text{если}\, X_{10}^* = I_{n_1},\ Z_0^*=0, \\ x_2(t),\ t\ge t_0, \text{если}\, X_{10}^* = A_{21}(t),\ Z_0^* = I_{n_2}; \end{cases} \Phi^*(\tau)\equiv 0,\ \tau>t.$$

О ЗАДАЧЕ СТАБИЛИЗАЦИИ СКАЛЯРНЫХ ГИБРИДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ СИСТЕМ

В.М. Марченко, И.М. Борковская

Белорусский государственный технологический университет, Минск, Беларусь
{vladimir.marchenko, borkovskaia}@gmail.com

В работе исследуются вопросы стабилизации скалярных гибридных дифференциально-разностных (ГДР) систем в шкалах линейных регуляторов по типу обратной связи. Рассматриваются два вида регуляторов: простейший регулятор, не выводящий систему за пределы заданного класса, и регулятор с интегральными составляющими типа свертки. Представлены необходимые условия стабилизации с помощью указанных регуляторов. Показано, что необходимое условие стабилизации с помощью регулятора с интегральными составляющими типа свертки является одновременно и достаточным [1].

Рассмотрим стационарную скалярную гибридную дифференциально-разностную систему в симметрической относительно операторов дифференцирования и сдвига форме

$$\dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + b_1u(t), \tag{1}$$

$$x_2(t+h) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + b_2u(t), t \geq 0, \tag{2}$$

с начальными условиями

$$x_1(0) = x_{10}, x_2(\tau) = \psi(\tau), \tau \in [0, h). \tag{3}$$

Здесь $x_1(t) \in \mathbb{R}$, $x_2(t) \in \mathbb{R}$, $h > 0$, $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$ — действительные числа; $u(\cdot)$ — внешнее (кусочно-непрерывное) воздействие — управление; $\psi(\cdot)$ — начальная кусочно-непрерывная функция. Под решением системы (1), (2) будем понимать абсолютно непрерывную функцию $x_1(\cdot)$ и кусочно-непрерывную функцию $x_2(\cdot)$, которые для всех $t \geq 0$ удовлетворяют уравнению (2) и для почти всех $t \geq 0$ удовлетворяют уравнению (1). Такое решение начальной задачи (1)–(3) для каждого начального значения x_{10} и кусочно-непрерывной функции $\psi(\cdot)$ существует, единственно и может быть найдено методом интегрирования системы (1)–(3) «по шагам». Присоединим к системе шкалы (классы) линейной обратной связи в виде:

1) простейшего регулятора

$$u(t) = Q_1x_1(t) + Q_2x_2(t), \tag{4}$$

2) более общего регулятора с интегральными составляющими типа свертки

$$u(t) = Q_1x_1(t)+Q_2x_2(t)+\int_0^t Q_1(s)x_1(t-s)ds+\int_0^t Q_2(s)x_2(t+h-s)ds, \tag{5}$$

где Q_1 и Q_2 — действительные числа; $Q_1(\cdot)$ и $Q_2(\cdot)$ — кусочно-непрерывные функции с конечным носителем $H > 0$, $Q_1(\cdot) \equiv 0$, $Q_2(\cdot) \equiv 0$ для $t > H$.

Исследуем задачу стабилизации системы (1), (2) в шкалах (4), (5), т.е. задачу отыскания регуляторов того или иного типа (отыскания чисел Q_1, Q_2, функций $Q_1(\cdot), Q_2(\cdot)$, при которых замкнутая система является устойчивой в том или ином смысле — асимптотически устойчивой, если не оговорено иное.

Теорема 1. *Если система (1), (2) является стабилизируемой в шкале (4) (или (5)), то*

$$rank \begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12}e^{-\lambda h} & b_1 \\ -a_{21} & 1 - a_{22}e^{-\lambda h} & b_2 \end{bmatrix} = 2, Re\lambda > 0. \qquad (6)$$

Теорема 2. *Если система (1), (2) является стабилизируемой в шкале (4) (или (5)), то*

$$rank[\ \lambda - a_{22} \quad b_2\ ] = 1, \forall \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| < 1. \qquad (7)$$

Теорема 3. *Необходимые условия (6), (7) стабилизируемости системы (1), (2) в шкале регуляторов (5) являются и достаточными.*

Приводится пример системы, для которой не существует простейшего регулятора, позволяющего ее стабилизировать, но находится регулятор с интегральными элементами. Получены условия стабилизации системы регулятором (4). Результаты могут быть применены при синтезе управляющих воздействий в реальных системах управления, описывающихся дифференциально-разностными системами.

Библиографические ссылки

1. *Марченко В.М., Борковская И.М.* О стабилизации скалярных гибридных дифференциально-разностных систем // Труды БГТУ. Сер. 3. Физ.-мат. науки и информатика. 2020. № 1. С. 5–13.

ОБ ОПТИМАЛЬНОСТИ ОСОБЫХ УПРАВЛЕНИЙ В СТОХАСТИЧЕСКИХ ОБЫКНОВЕННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ

Р.О. Масталиев

Институт систем управления НАН Азербайджана, Баку, Азербайджан
mastaliyevrashad@gmail.com

Рассматривается задача оптимального управления обыкновенными стохастическими системами Ито (уравнением диффузии) [1–4], при предположении, что управляющая функция также входит в коэффицент диффузии, а критерий оптимальности является математическим ожиданием многоточечного функционала. Установлен стохастический аналог принципа максимума Понтрягина и исследован случай его вырождения (особые управления) [5, 6].

Пусть (Ω, F, P) — полное вероятностное пространство с определенным на нем неубывающим потоком σ-алгебр F^t, где $F^t = \sigma(w(s), t_0 \leq s \leq t)$, а $w(t)$ — n-мерный стандартный винеровский процесс. $L_F^2(t_0, t_1; R^n)$ — пространство измеримых по (t, ω) и F^t-согласованных процессов, $x(t, \omega) : [t_0, t_1] : \Omega \to R^n$, для которых

$$E \int_{t_0}^{t_1} \|x(t)\|^2 dt < +\infty,$$

где E — знак математического ожидания.

Предположим, что закон движения управляемой динамической системы на заданном отрезке времени $T = [t_0, t_1]$ описывается системой нелинейных стохастических уравнений Ито

$$dx(t) = f(t, x(t), u(t))dt + \sigma(t, x(t), u(t))dw(t), t \in T = [t_0, t_1], \qquad (1)$$

с начальным условием

$$x(t_0) = x_0. \qquad (2)$$

Здесь $x(t) \in R^n$ — вектор состояния системы; $f(t, x, u)$ — заданная n-мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по x до второго порядка включительно; $\sigma(t, x, u) : T \times R^n \times R^r \to R^{n \times n}$ — $(n \times n)$-мерная матричная функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по x до второго порядка включительно.

$$u(t, \omega) \in U_d \equiv \{u(.,.) \in L_F^2(t_0, t_1; R^r) | u(.,.) \in U \subset R^r, \text{п.н.}\} \qquad (3)$$

где U — заданное непустое, ограниченное множество.

Множество U_d назовем множеством допустимых управлений.

Предполагается, что каждому допустимому управлению $u(t)$, $t \in T$, соответствует единственное почти наверное непрерывное решение $x(t)$ системы (1)–(2).

Требуется подобрать процесс управления $(u(t), x(t))$ с целью минимизации значения многоточечного функционала качества:

$$S(u) = E\varphi(x(T_1), x(T_2), \ldots, x(T_k)), \qquad (4)$$

где $\varphi(z_1, z_2, ..., z_k)$ — заданная дважды непрерывно дифференцируемая скалярная функция, а $T_i \in (t_0, t_1], i = \overline{1, k}$, — заданные точки, причем $t_0 < T_1 < T_2 < ... < T_k \leq t_1$.

Применяя модифицированный вариант метода, развитый в детерминированных случаях в работах [5, 6], установлен стохастический принцип максимума Понтрягина. Далее, используя стохастический аналог метода, предложенный и развитый в работах [7, 8], установлены необходимые условия оптимальности особых управлений в рассматриваемой задаче (1)–(4).

Библиографические ссылки

1. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Стохастические дифференциальные уравнения. Киев: Наук. думка, 1968, 355 с.
2. *Параев Ю.И.* Введение в статистическую динамику процессов управления и фильтрации. М.: Сов. радио, 1976, 184 с.
3. *Оксендаль Б.* Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения. М.: Мир, 2003, 408 с.
4. *Леваков А.А.* Стохастические дифференциальные уравнения. Минск: БГУ, 2009, 231 с.
5. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Принцип максимума в теории оптимального управления. М. URSS, 2011, 272 с.
6. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Особые оптимальные управления. М.: Книжный дом «Либроком», 2013, 256 с.
7. *Мансимов К.Б., Марданов М. Дж.* Качественная теория оптимального управления системами Гурса–Дарбу. Баку: «ЭЛМ», 2010, 360 с.
8. *Мансимов К.Б.* Особые управления в системах с запаздыванием. Баку: «ЭЛМ», 2013, 176 с.

ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

И.И. Матвеева

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия
matveeva@math.nsc.ru

Рассматриваются системы дифференциальных уравнений с переменным запаздыванием

$$\dot{y}(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau(t)) + C(t)\dot{y}(t-\tau(t))$$
$$+F(t, y(t), y(t-\tau(t)), \dot{y}(t-\tau(t))), \qquad t > 0, \tag{1}$$

где $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ — матрицы размера $n \times n$ с непрерывными вещественнозначными элементами, $\tau(t)$ — функция, определяющая запаздывание, $\tau(t) \in C^1([0,\infty))$,

$$0 < \tau_0 \le \tau(t) \le \tau_1 t + \tau_2, \quad 0 \le \tau_1 \le 1, \quad \tau_2 > 0, \quad \dot{\tau}(t) \le \tau_3 < 1,$$

$F(t,u,v,w)$ — непрерывная вещественнозначная вектор-функция. Мы предполагаем, что $F(t,u,v,w)$ липшицева по u на любом компакте и удовлетворяет неравенству

$$\|F(t,u,v,w)\| \le q\|u\|^{1+\omega}, \qquad t \ge 0, \quad u,\ v,\ w \in \mathbb{R}^n,$$

при q, $\omega \ge 0$.

Работа продолжает наши исследования устойчивости решений неавтономных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом (см., например, [1–8]). Используя функционалы Ляпунова – Красовского специального вида, установлены оценки решений систем вида (1) на полупрямой $\{t > 0\}$ [9]. Полученные оценки позволяют сделать вывод об устойчивости решений. В случае экспоненциальной и асимптотической устойчивости указаны оценки на области притяжения и оценки, характеризующие скорость стабилизации решений на бесконечности.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-29-10086).

Библиографические ссылки

1. *Демиденко Г.В., Матвеева И.И.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и периодическими коэффициентами в линейных членах // Сибирский математический журнал. 2007. Т. 48. № 5. С. 1025–1040.
2. *Демиденко Г.В., Матвеева И.И.* Об оценках решений систем дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами // Сибирский математический журнал. 2014. Т. 55. № 5. С. 1059–1077.
3. *Матвеева И.И.* Об экспоненциальной устойчивости решений периодических систем нейтрального типа // Сибирский математический журнал. 2017. Т. 58. № 2. С. 344–352.
4. *Матвеева И.И.* Об экспоненциальной устойчивости решений периодических систем нейтрального типа с несколькими запаздываниями // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53. № 6. С. 730–740.
5. *Демиденко Г.В., Матвеева И.И., Скворцова М.А.* Оценки решений дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами в линейных членах // Сибирский математический журнал. 2019. Т. 60. № 5. С. 1063–1079.

6. *Матвеева И.И.* Оценки экспоненциального убывания решений линейных систем нейтрального типа с периодическими коэффициентами // Сибирский журнал индустриальной математики. 2019. Т. 22. № 3. С. 96–103.
7. *Matveeva I.I.* Exponential stability of solutions to nonlinear time-varying delay systems of neutral type equations with periodic coefficients // Electronic Journal of Differential Equations. 2020. Vol. 2020, No. 20. P. 1–12.
8. *Матвеева И.И.* Оценки экспоненциального убывания решений одного класса нелинейных систем нейтрального типа с периодическими коэффициентами // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2020. Т. 60. № 4. С. 612–620.
9. *Матвеева И.И.* Оценки решений класса неавтономных систем нейтрального типа с неограниченным запаздыванием // Сибирский математический журнал. 2021. Т. 62. № 3. С. 583–598.

НАБЛЮДАТЕЛИ С ФИНИТНОЙ ОШИБКОЙ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

А.В. Метельский[1], В.Е. Хартовский[2]

[1] Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь
ametelski@bntu.by

[2] Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Беларусь
hartovskij@grsu.by

Динамическая система, переменные выхода которой суть оценки переменных состояния другой системы, называется наблюдателем этой системы. Это определение было введено в 1963 г. в теории линейных систем Луенбергером [1]. Он показал, что для каждой наблюдаемой линейной системы может быть спроектирован асимптотический наблюдатель с ошибкой оценки, стремящейся к нулю с заданной скоростью. В дальнейшем теория проектирования асимптотических наблюдателей получила широкое развитие и на сегодняшний день располагает обширной библиографией.

В настоящем докладе представлен принципиально иной подход к вопросу оценки состояния линейных систем. А именно, для линейных систем нейтрального типа предлагаются [2, 3] методы проектирования финитных наблюдателей, позволяющих получить оценку решения исходной системы с ошибкой, которая через конечное время равна нулю. В основе идеи лежит выбор параметров финитного наблюдателя таким образом, чтобы его ошибка удовлетворяла точечно вырожденной системе (система называется точечно вырожденной в направлении вектора g, если найдется момент времени $t_1 > 0$ такой, что $g^{\mathrm{T}} x(t) \equiv 0$, $t \geq t_1$, при всех начальных состояниях этой системы).

Пусть задана линейная автономная дифференциально-разностная система нейтрального типа с соизмеримыми запаздываниями

$$\dot{x}(t) - \sum_{i=1}^{m} D_i \dot{x}(t-ih) = \sum_{i=0}^{m} A_i x(t-ih), \quad t > 0, \tag{1}$$

$$y(t) = \sum_{i=0}^{m} C_i x(t-ih), \quad t \geq 0, \tag{2}$$

где $D_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $C_i \in \mathbb{R}^{l\times n}$, x — вектор решения, y — вектор выходных величин, доступных наблюдению (выход), $h = \mathrm{const} > 0$. Решение уравнения (1) однозначно задается начальной функцией $x(t) = \varphi(t)$, $t \in [-mh, 0]$, взятой из класса непрерывных на отрезке $[-mh, 0]$ функций, имеющих на этом отрезке кусочно-непрерывную производную. Считаем, что функция φ является неизвестной.

Задача 1. Требуется построить линейную автономную дифференциальную систему запаздывающего типа с выходом $\bar{x}$ такую, что при входном сигнале y, определяемом формулой (2), выход $\bar{x}$, начиная с некоторого момента времени $t_1 > 0$, есть точная оценка неизвестного решения x уравнения (1): $\bar{x}(t) - x(t) \equiv 0$, $t \geq t_1$. Дифференциальную систему с выходом $\bar{x}$, реализующую оценку x уравнения (1), назовем финитным наблюдателем для системы (1), (2).

Обозначим:

$$D(\lambda) = \sum_{i=1}^{m} \lambda^i D_i, \quad A(\lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda^i A_i, \quad C(\lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda^i C_i,$$

$I_i \in \mathbb{R}^{i\times i}$ – единичная матрица, $W(p,\lambda) = p(I_n - D(\lambda)) - A(\lambda)$ — характеристическая матрица системы (1) (при $\lambda = e^{-ph}$), $\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел.

Теорема 1. *Для того, чтобы задача 1 была разрешима необходимо и достаточно двух условий:*

$$1)\, \mathrm{rank} \begin{bmatrix} W(p, e^{-ph}) \\ C(e^{-ph}) \end{bmatrix} = n, \quad p \in \mathbb{C};$$

$$2)\, \mathrm{rank} \begin{bmatrix} I_n - D(\lambda) \\ C(\lambda) \end{bmatrix} = n, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Далее в докладе дается описание разработанных в [2, 3] методов синтеза регуляторов, обеспечивающих решение задачи 1.

Работа выполнена в рамках ГПНИ "Конвергенция-2025".

Библиографические ссылки

1. *Luenberger D.G.* An Introduction to Observers // IEEE Trans. Automat. Contr. 1971. Vol. AC-16. No. 6. P. 596–602.
2. *Метельский А.В., Хартовский В.Е.* Синтез финитного наблюдателя для линейных систем нейтрального типа // Автоматика и телемеханика. 2019. № 12. С. 80–102.
3. *Метельский А.В., Хартовский В.Е.* О точном восстановлении решения линейных систем нейтрального типа // Дифференциальные уравнения. 2021. Т. 57. № 2. С. 265–285.

РЕШЕНИЕ НЕПРЕРЫВНОЙ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С НЕРАЗДЕЛЕННЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

М.М. Муталлимов[1,2], Ф.А. Алиев[1,2], Н.Ш. Гусейнова[1]

[1] Институт прикладной математики, БГУ, Баку, Азебайджан
mmutallimov@bsu.edu.az

[2] Институт информационных технологий, НАНА, Баку, Азебайджан
f_aliev@yahoo.com

Введение. Как известно [1], для решения линейно квадратичной задачи оптимизации с неразделенными краевыми условиями в непрерывном случае существуют разные методы: метод, повышающий размерности исходной системы [2], метод прогонки [3], метод Мощинского [4, 5]. Однако каждый из этих методов сталкивается с определенными трудностями. Поэтому в данной работе предлагается новый метод, не требующий решения матричных уравнений Риккати и линейных матричных уравнений.

1. Постановка задачи. Пусть движение объекта описывается системой линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = F(t)x(t) + G(t)u(t),\ t \in [t_0, \tau], \tag{1}$$

с неразделенными краевыми условиями

$$K_1 x(t_0) - K_2 x(\tau) = q, \tag{2}$$

где x — n-мерный фазовый вектор, $u(t)$ — m-мерный вектор управляющих воздействий, $F(t)$, $G(t)$ — известные кусочно-непрерывные функции-матрицы, $n \times n$, $n \times m$-размерности, K_1, K_2 — постоянные матрицы $k \times n$-размерности, q — постоянный k -мерный вектор, τ — заданное время. Требуется найти управляющие воздействия $u(t)$ так, чтобы с соответствующим $x(t)$ из (1), (2) минимизировали квадратичный критерий качества

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\tau} \left(x^{\mathrm{T}}(t) R(t) x(t) + u^{\mathrm{T}}(t) C(t) u(t) \right) dt. \tag{3}$$

Здесь $R(t) = R^{\mathrm{T}}(t) \geq 0$, $C(t) = C^T(t) > 0$, — соответственно $n \times n$, $m \times m$-размерные, кусочно-непрерывные функции-матрицы, T — операция транспонирования.

2. Метод прогонки. Известно, что решение задачи (1)-(3) сводится к нахождению решения следующей системы уравнений Эйлера-Лагранжа:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(t) & -G(t)C^{-1}(t)G^T(t) \\ -R(t) & -F^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} = H(t) \begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} \tag{4}$$

с дополнительными краевыми условиями:

$$\begin{aligned} \lambda(t_0) &= -K_1^{\mathrm{T}} \nu, \\ \lambda(\tau) &= -K_2^{\mathrm{T}} \nu, \end{aligned} \tag{5}$$

где $\lambda(t)$ — n-мерный и ν — k-мерный соответствующие сопряженные векторы Лагранжа оптимизационной задачи (1)-(3), а $u(t)$ определяется из соотношений $C(t)u(t) + G(t)\lambda(t) = 0$.

Пусть $\Phi(t, t_0)$ является фундаментальной матрицей системы (4):

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = H(t)\Phi(t, t_0), \; \Phi(t_0, t_0) = E, \tag{6}$$

где E — $2n \times 2n$-единичная матрица. Обозначим

$$\Phi(t, t_0) = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(t, t_0) & \Phi_{12}(t, t_0) \\ \Phi_{21}(t, t_0) & \Phi_{22}(t, t_0) \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Тогда, как показано в [4], решение задачи (1)-(3) будет иметь вид

$$x(t) = \Phi_{11}(t, t_0)x(t_0) - \Phi_{12}(t, t_0)K_1^{\mathrm{T}}\nu, \tag{8}$$

$$u(t) = -C^{-1}(t)G(t)\Phi_{21}(t, t_0)x(t_0) + C^{-1}(t)G(t)\Phi_{22}(t, t_0)K_1^{\mathrm{T}}\nu. \tag{9}$$

Библиографические ссылки

1. *Алиев Ф.А.* Задача оптимизации с двухточечными краевыми условиями // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1985. № 6. С. 138-146.
2. *Шаманский В.Е.* Методы численного решения краевых задач на ЭЦВМ. Ч. I. Киев: Наук. думка, 1963.
3. *Муталлимов М.М.* Алгоритм "прогонки"для решения задачи оптимизации с неразделенными трехточечными краевыми условиями // Докл. НАН Азербайджана. 2007. Т. LXIII. № 2. С. 24–29.
4. *Moszynski K.A.* Method of Solving the Boundary Value Problem for a System of Linear Ordinary Differential Equations // Algorytmy. 1964. Vol.11. No 3. P. 25–43.
5. *Алиев Ф.А., Гусейнова Н.Ш., Магеррамов И.А., Муталлимов М.М.* Новый алгоритм прогонки для решения непрерывной линейно квадратичной задачи оптимального управления с неразделенными краевыми условиями // Известия РАН. Теория и системы управления. 2021. № 1. С. 50–57.

УСТОЙЧИВОСТЬ ИЗОЛИРОВАННЫХ РЕЖИМОВ ПЛАНИРОВАНИЯ ТЯЖЕЛОГО ОПЕРЕННОГО ТЕЛА В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ

Ю.М. Окунев, О.Г. Привалова, В.А. Самсонов

НИИ механики МГУ, Москва, Россия
{privalova, samson}@imec.msu.ru

Исследуется спуск тяжелого оперенного тела в сопротивляющейся среде. Оперение тела состоит из четного числа одинаковых лопастей. Лопасти на теле размещаются таким образом, чтобы центры лопастей оказались в плоскости, ортогональной оси тела, на одинаковом расстоянии от нее. Углы между державками, на которых установлены лопасти, одинаковы. Лопасти устанавливаются на углы, которые определяются как углы между нормалью к плоскости лопасти и плоскостью, проходящей через центры давления лопастей.

В случае, когда лопасти установлены на одинаковые углы, спуск тела происходит в режиме авторотации вокруг оси симметрии [1–3].

В настоящей работе исследуется движение тела, у которого половина соседних лопастей установлены на одинаковые углы, а другая половина на углы той же величины, но противоположного знака. При таком расположении лопастей на теле возникают изолированные режимы планирования.

Находится зависимость величины скорости центра масс тела на спуске в режиме планирования от угла установки лопастей.

Проводится сравнение скорости спуска тела в режиме авторотации [4] и вертикальной составляющей скорости центра масс в режиме планирования для тела с тонкими лопастями в форме круга и прямоугольника, аэродинамические характеристики, которых известны [5].

Показывается, что вертикальная составляющая скорости движения тела в режиме планирования меньше, чем в режиме авторотации.

Исследуется асимптотическая устойчивость тела в режиме планирования, возникающего с указанной установкой лопастей. Строятся области устойчивости на плоскости значений установочного угла лопасти и смещения центра масс для тел с рассматриваемыми формами лопастей.

Область устойчивости режима авторотации для тех же форм лопастей построена в работе [6].

Проводится сравнение областей устойчивости тяжелого тела в режиме авторотации и в режиме планирования. Показывается, что область устойчивости при движении в режиме планирования больше, чем в режиме авторотации.

Приводятся траектории центра масс тел указанной формы на спуске, когда половина соседних лопастей установлены на одинаковые углы, а другая половина на углы той же величины, но противоположного знака.

Работа выполнена при финансовой поддержке Междисциплинарной научно-образовательной школы Московского университета «Математические методы анализа сложных систем».

Библиографические ссылки

1. *Привалов В.А., Самсонов В.А.* Об устойчивости движения тела, авторотирующего в потоке среды // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 2. С. 32–38.
2. *Локшин Б.Я., Привалова О.Г., Самсонов В.А.* К динамике ротошюта. М.: МГУ, 2018, 62 с.
3. *Okunev Yu.M., Privalova O.G., Samsonov V.A.* The geometry of stability domains of systems with different dimensions Proceedings of the conference "Mechanics - Seventh Polyakhov's Reading, 2015 International Conference on 10.1109/POLYAHOV.2015.7106763, IEEE DOI.
4. *Okunev Yu., Privalova O., Samsonov V.* Influence of shape of blades upon descent of a finned body in media Proceedings of the conference “15th International Conference on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference)” (STAB), 2020, Institute of Electrical and Electronics Engineers (Piscataway, NJ, United States). P. 1–2.
5. *Табачников В.Г.* Стандартные характеристики крыльев на малых скоростях во всем диапазоне углов атаки // Тр. ЦАГИ. 1974. Вып. 1621. С. 79–93.

6. *Okunev Yu M., Privalova O.G., Samsonov V.A.* Influence of blade shape upon the auto-rotation stability Proceedings of the conference "International Conference Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems"(Pyatnitskiy's Conference), 2016. IEEE. P. 1–3.

ОПТИМИЗАЦИИ ВРЕМЕНИ ПРОХОЖДЕНИЯ ОБЛАСТИ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМОЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

С. Очилов

Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан
s-ochilov56@mail.ru

Задача имеет своим источником важные практические проблемы. Она решает такие задачи, когда требуется найти траекторию некоторой динамической системы, которая минимальное время находится в заражённой области, причём это область может перемещаться со временем, задача быстрейшего прохождения самолётом грозового фронта при его внезапном, не предсказанном появлении и невозможности обхода, и другие нетрадиционные задачи оптимального управления. Здесь продолжаются исследования, начатые в [1], когда движение объекта описывается линейной системой без запаздывания. Следует отметить, что аналогичные задачи рассмотрены в [2] для перехода в управляемых системах, а в работе [3] задача оптимального управления для автономного дифференциального включения со свободным временем и интегральным функционалом, содержащим характеристическую функцию заданного замкнутого множества $M \subset R^n$.

Пусть поведение объекта определяется системой дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t-h) + Bu(t),$$

где $x(t)$, $t \in [0,1]$ — n-мерная вектор-функция состояния, A, A_1, B — матрицы соответствующих размерностей, $h > 0$ — постоянное запаздывание, $u(t)$ — m-мерная вектор-функция управления из заданного класса кусочно-непрерывных вектор-функций U при $t \in [0,1]$.

Задано множество

$$M_1 = \left\{x \in R^n : \varphi_j\left(x\right) \leq 0, \varphi_j(x) \in C^{(1)}, j = 1, \ldots, s\right\},$$

многозначное отображение $M(\cdot)$ отрезка $[0,1]$ в множество всевозможных подмножеств пространства R^n

$$M(t) = \{x \in R^n : \varphi_0(x,t) \leq 0, t \in [0,1]\},$$

где $\varphi_0(x,t)$ – непрерывно дифференцируемая функция по обеим переменным и начальное условие

$$x(t) = x_0(t), t \in [-h, 0],$$

удовлетворяющие условиям

$$M_1 \cap M(1) = \emptyset, \quad x(0) \notin M(0).$$

Требуется выбрать управление $u(\cdot) \in U$ так, чтобы $x(1) \in M_1$, а время, в течение которого выполнено включение $x(t) \in M(t)$ было бы минимальным. Примененный метод исследования, основанный на результаты обобщенных методов обычного правило множителей Лагранжа [4], позволили получить качественные результаты исследований.

Теорема 1. *Пусть $x^0(\cdot)$ оптимальная траектория и $u^0(\cdot)$ соответствующее ей оптимальное управление. Если выполнены условия согласованности в точках t_q, $q = 1, 3, \cdots, 2m-1$, входа в множество $M(t)$, и выхода из него t_{q+1}, $q = 1, 3, \cdots, 2m-1$, оптимальная траектория регулярна, то существуют не все равные нулю числа $\lambda_j \geq 0$, $j = 0, 1, 2, \cdots, s$, и вектор-функция $\psi(\tau)$, $\tau \in (t_q, t_{q+1})$, $q = 1, 3, \cdots, 2m-1$, такие, что имеют места соотношения:*

$$\dot{\psi}(\tau) = -A'\psi(\tau), \quad \tau \in (t_q, t_{q+1}), \quad i = 1, 3, \ldots, 2m-1,$$

$$\psi(t_q + 0) - \psi(t_q - 0) = (-1)^i \lambda_0 n\left(x^0(\cdot), t_q\right), \quad q = 1, 2, \ldots, 2m,$$

$$\psi(1) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \varphi'_{jx}\left(x^0(1)\right),$$

$$\psi'(1) x^0(1, u^0(\cdot)) = \min_{u(\cdot) \in U} \psi'(1) x(1, u(\cdot)).$$

Библиографические ссылки

1. *Пшеничный Б.Н., Очилов С.* Оптимизация времени прохождения через область // Кибернетика и системный анализ. 1993. № 3. С. 167–171.
2. *Тухтасинов М., Маматов М.Ш.* О задачах перехода в управляемых системах // Дифференциальные уравнения. 2009. 45 (3). С. 425–430

3. *Асеев С.М., Смирнов А.И.* Принцип максимума Понтрягина для задачи оптимального прохождения через заданную область // Доклады Академии наук. 2004. Т. 395. № 5. С. 583–585.
4. *Пшеничный Б.Н.* Необходимые условия оптимальности, М.: Наука 1982.

ЭВОЛЬВЕНТА КРУГА И ТРЕХМЕРНОЕ МНОЖЕСТВО ДОСТИЖИМОСТИ ДЛЯ МАШИНЫ ДУБИНСА

В.С. Пацко, А.А. Федотов

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского, Екатеринбург, Россия
patsko@imm.uran.ru

Под машиной Дубинса [1] понимаем управляемую систему на плоскости x, y:

$$\dot{x} = \cos\varphi, \quad \dot{y} = \sin\varphi, \quad \dot{\varphi} = u, \qquad |u| \le 1. \tag{1}$$

Движение системы происходит с постоянной линейной скоростью 1. Угол $\varphi \in (-\infty, \infty)$ задает направление вектора скорости и изменяется в силу скалярного управления $u(t)$. Угол отсчитывается от оси x против часовой стрелки.

Множеством достижимости $G(t_f)$ называем совокупность всех фазовых состояний, в каждое из которых систему (1) можно перевести в момент t_f при помощи некоторого кусочно-постоянного управления $u(t)$, удовлетворяющего ограничению $|u(t)| \le 1$. Начальное состояние в момент $t_0 = 0$ без ограничения общности считаем нулевым.

В случае, когда множество достижимости рассматривается в геометрических координатах (проекция трехмерного множества $G(t_f)$ на плоскость x, y), его структура хорошо известна и описана в [2]. Здесь граница множества достижимости составляется при помощи четырех кривых, две из которых – эвольвенты круга, а две другие – кардиоиды.

Для трехмерного множества достижимости в работе [3] были выделены шесть типов управлений с двумя переключениями, которыми можно ограничиться при построении границы $G(t_f)$. Настоящая работа посвящена аналитическому описанию сечений множества $G(t_f)$ по угловой координате (φ-сечений). В частном случае, когда $t_f \le 2\pi$, такое описание сделано в [4].

В общем случае граница двумерного φ-сечения составляется из дуг четырех кривых, каждая из которых порождается одним из шести типов управлений с двумя переключениями. Перечислим для $\varphi > 0$ используемые типы управлений: 1) $+1, 0, +1$; 2) $-1, 0, +1$; 3) $+1, 0, -1$;

6) $-1,+1,-1$. Установлено, что кривые А1 и А6, соответствующие первому и шестому типу, являются дугами окружностей. Неожиданным для авторов оказалось то, что две другие кривые А2 и А3 являются участками эвольвент круга. Радиусы соответствующих кругов, на основе которых строятся эвольвенты, одинаковы и не зависят от t_f и φ. Однако центры кругов зависят от φ. Длина "нерастяжимой нити", при помощи которой образуется эвольвента, равна $t_f - \varphi$.

В докладе будут показаны демонстрационные материалы (в том числе, видео), поясняющие структуру границы трехмерного множества достижимости с изменением момента t_f. Значительное внимание будет уделено случаям неодносвязности множества достижимости и его φ-сечений.

На рис. 1 показан пример φ-сечения множества достижимости $G(t_f)$. При небольшом дальнейшем увеличении t_f происходит касание, а затем и пересечение кривых (эвольвент) А2 и А3. Получаемое φ-сечение при фиксированном $\varphi = \pi/5$ на небольшом промежутке значений t_f становится неодносвязным.

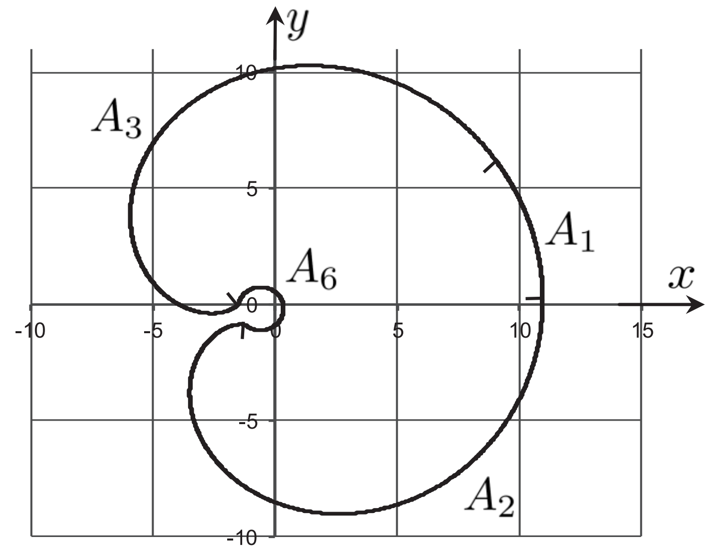


Рис. 1 — Сечение множества достижимости $G(t_f)$ по φ для значений $\varphi = \pi/5$ и $t_f = 7\pi/2$

Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском Математическом Центре.

Библиографические ссылки

1. *Laumond J.-P. (ed.)* Robot motion planning and control. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1998. 354 p. (Lecture Notes in Control and Information Sciences. Vol. 229).

2. *Cockayne E.J., Hall G.W.C.* Plane motion of a particle subject to curvature constraints // SIAM Journal on Control and Optimization. 1975. Vol. 13. No. 1. P. 197–220.
3. *Пацко В.С., Пятко С.Г., Федотов А.А.* Трехмерное множество достижимости нелинейной управляемой системы // Известия РАН. ТиСУ. 2003. № 3. С. 8–16.
4. *Пацко В.С., Федотов А.А.* Аналитическое описание множества достижимости для машины Дубинса // Труды института математики и механики. 2020. Том 26. № 1. С. 182–197.

МОДЕЛИ РЕЖИМОВ ОСЦИЛЛЯЦИЙ ДЛЯ ПОПУЛЯЦИЙ С НЕКОНТРОЛИРУЕМОЙ РЕПРОДУКТИВНОЙ АКТИВНОСТЬЮ

А.Ю. Переварюха

Санкт–Петербургский Федеральный исследовательский центр РАН,
Санкт–Петербург, Россия
temp_elf@mail.com

Введение. Во время активных инвазионных процессов распространения чужеродных биологических видов в новой для них биотической среде часто наблюдаются чрезвычайно стремительные изменения численности. Формы таких экстремальных переходных популяционных процессов чрезвычайно разнообразны. Виды при попадании в разные экосистемы демонстрируют несхожие режимы динамики. Инвазионные явление нельзя описать обобщенной популяционной моделью. Классификация форм динамики популяций видов-вселенцев является отдельной проблемой. Можно выделить несколько типов популяционного процесса с переходом к фазе взрывообразного размножения. Вспышка может быть единичной пороговой $\Lambda-$ образной, серией пилообразных несвязных пиков или негармонических флуктуаций как у бабочки *Choristoneura fumiferana* в Канаде — режим экстремальных колебаний численности агрессивного вида. Репродуктивная активность вселенца перестает эффективно контролироваться средой. Противодействие становится минимальным, и если репродуктивный потенциал высок, запускается разрушительная вспышка. У всех сообществ есть некоторый предел выдерживаемого давления. Моделирование явлений предусматривает варианты завершения для экстремальных сценариев.

1. Модифицированные модели колебаний вида-вселенца. Колебания численности многих видов не зависят от динамики их конкурентов [1]. Автоколебательные режимы наблюдались у лабораторных популяций рыб и насекомых, что отвечает свойствам циклического решения уравнения с сосредоточенным запаздыванием τ:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t)\left(1 - \frac{N(t-\tau)}{K}\right). \tag{1}$$

Введенное в (1) запаздывание τ служит мерой скорости саморегуляции — использования и восстановления ресурсов [2], но не связано с временем жизни поколений. При малых значениях запаздывания τ динамика модели опишет затухающие колебания $N(t) \to K$. Для (1) типична бифуркация Андронова-Хопфа с появлением устойчивого предельного цикла $N_*(t, r)$. Нарушение устойчивости состояния равновесия зависит от величины $r\tau$. Дальнейшее увеличение $r\tau > \pi/2$ вызывает переход в режим релаксационных колебаний. Возрастание амплитуды колебаний негармонической формы при увеличении промежутка между максимумами и стремящиеся к нулю минимумы приводят такой цикл $N_*(t, r)$ за грань обоснования в реальных экологических ситуациях. Для моделирование колебательной активности популяции при приближении репродуктивного r-потенциала к критическим значениям и без $K-$предела насыщения как равновесного $N(t) \to K$ состояния предположим существование предкритического порогового уровня $H < K$. Достижение значения K означает непоправимую деградацию для среды обитания. Переход через мягкий порог H имеет значение для механизмов контроля внутрипопуляционной структуры. Тогда на динамику системы оказывает влияние отклонение $(H - N(t - \tau))$, притом величина отклонения может быть как положительной, так и отрицательной. Модифицируем (1) в форме двумя запаздываниями:

$$\frac{dN}{dt} = r_1 N\left(1 - \frac{N(t-\tau_1)}{K}\right)(H - N(t-\tau_2)), \tau_1 > \tau_2. \tag{2}$$

При малом значении запаздывания вычисления покажут затухающие осцилляции с $N \to H$. Очевидно при увеличении τ или r_1 в уравнении возникнет устойчивый цикл и станет релаксационным с возрастанием r_1. При дальнейшем увеличении значения $r_1\tau$ произойдет резкое изменение поведения траектории, которая перестанет притягиваться к замкнутому подмножеству фазового пространства. Осциллирующая траектория решения вместо установления цикла с увеличивающейся амплитудой будет резко выброшена за пределы допустимых для значений при $N(t-\tau) > K$. Решение (2) после переходного цикла становится неограниченным. В (2) получен сценарий, который в вычислительном эксперименте трактуется как вариант разрушение среды и последующая деградация изолированной экосистемы после серии циклических вспышек, завершившихся недопустимым значением численности.

Библиографические ссылки

1. *Mikhailov V.V.* Model of fish population dynamics with calculation of individual growth rate and hydrological situation scenarios // Information and Control Systems. 2018. № 4. P. 31–38.
2. *Переварюха А.Ю.* Запаздывание в регуляции популяционной динамики — модель клеточного автомата // Динамические системы. 2017. Т. 7. № 2. С. 157–165.

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ ВО ВРЕМЕННЫХ ШКАЛАХ

Н.Н. Петров

Удмуртский университет, Ижевск, Россия
kma3@list.ru

Введение. Одним из направлений развития современной теории дифференциальных преследования-уклонения со многими участниками является поиск задач, к которым применимы ранее разработанные методы.

При изучении структуры решений систем дифференциальных уравнений, разностных уравнений и некоторых более общих функциональных уравнений присутствует определенное число близких свойств. В качестве единого инструмента для изучения этих свойств в настоящее время активно развивается теория динамических уравнений во временных шкалах. В данной работе рассматривается задача простого преследования группой преследователей одного или нескольких убегающих в предположении, что движение участников описывается дифференциальными уравнениями в заданной временной шкале, все участники обладают равными возможностями, убегающие не покидают пределы выпуклого многогранного множества.

1. Постановка задачи. Пусть задана некоторая временная шкала T, $t_0 \in T$. В пространстве $\mathbb{R}^k (k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра Γ $n+m$ лиц: n преследователей $P_1, \ldots, P_n$ и m убегающих $E_1, \ldots, E_m$ с законами движения вида

$$x_i^{\Delta} = u_i, \quad x_i(t_0) = x_i^0, \quad y_j^{\Delta} = v, \quad y_j(t_0) = y_j^0, \quad u_i, v \in V.$$

Здесь $x_i, y_j, x_i^0, y_j^0, u_i, v \in \mathbb{R}^k$, $i \in I = \{1,\ldots,n\}$, $j \in \{1,\ldots,m\}$, $V = \{v \in \mathbb{R}^k : \|v\| \leqslant 1\}$, f^Δ — производная функции f в заданной временной шкале. Считаем, что $x_i^0 \neq y_j^0$ для всех $i \in I, j \in J$. Дополнительно предполагается, что каждый убегающий $E_j, j \in J$ в процессе игры не покидает пределы выпуклого множества Ω с непустой внутренностью вида

$$\Omega = \{y \in \mathbb{R}^k \bigm| (p_j, y) \leqslant \mu_j, j = 1,\ldots,r\},$$

где $p_1,\ldots,p_r$ — единичные векторы $\mathbb{R}^k$, $\mu_1,\ldots,\mu_r$ — вещественные числа, (a,b) — скалярное произведение. Считаем, что $\Omega = \mathbb{R}^k$ при $r = 0$.

2. Многократная поимка одного убегающего. В данном разделе считаем, что $m = 1$.

Определение 1. *В игре Γ происходит l-кратная поимка (при $l = 1$ поимка) убегающего E, если существует $T_0 \in T$ при котором для любого Δ-допустимого управления $v(t), t \in T$ убегающего E найдутся Δ-допустимые управления $u_i(t) = u_i(t, x_i^0, y^0, v(s), s \in T)$ преследователей $P_i, i \in I$ моменты времени $\tau_1,\ldots,\tau_l \in [t_0, T_0] \cap T$, попарно различные натуральные числа $i_1,\ldots,i_l \in I$, что $x_{i_p}(\tau_p) = y(\tau_p)$, $p = 1,\ldots,l$.*

Обозначим через $\mathrm{Int}A, \mathrm{co}A$ — соответственно внутренность и выпуклую оболочка множества A,

$$\Omega_N(p) = \{(i_1,\ldots,i_p) : i_\alpha \in N \text{ и попарно различны}\}.$$

Теорема 1. *Пусть $r = 1$ и $0 \in \bigcap\limits_{\Lambda \in \Omega_I(n-l+1)} \mathrm{Intco}\{x_\alpha^0 - y_1^0, \alpha \in \Lambda, p_1\}$. Тогда в игре $\Gamma(n,1)$ происходит l-кратная поимка убегащего E_1.*

Теорема 2. *Пусть $n \geqslant k$, среди векторов $\{x_1^0 - y_1^0,\ldots,x_n^0 - y_1^0\}$ имеется k линейно независимых и*

$$0 \in \mathrm{Intco}\{x_1^0 - y_1^0,\ldots,x_n^0 - y_1^0, p_1,\ldots,p_r\}.$$

Тогда в игре $\Gamma(n,1)$ происходит поимка.

Теорема 3. *Пусть существует $p_0 \in \mathbb{R}^k$ такой, что $D \subset D_0 = \{y : (p_0, y) \leqslant \mu_0\}$ и*

$$0 \in \bigcap_{\Lambda \in \Omega_I(n-l+1)} \mathrm{Intco}\{z_{\alpha 1}^0, \alpha \in \Lambda, p_0\}.$$

Тогда в игре $\Gamma(n,1)$ происходит l-кратная поимка убегающего E_1.

3. Поимка жестко скоординированных убегающих. В данном разделе считаем, что все убегающие используют одно и то же управление.

Теорема 4. *Пусть* $0 \in \operatorname{Intco}\{x_i^0 - y_j^0, i \in I, j \in J, p_1, \ldots, p_r\}$, $n \geqslant k$. *Тогда в игре* $\Gamma(n, m)$ *происходит поимка хотя бы одного убегающего.*

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания № 075-00232-20-01, проект FEWS -2020-0010 и РФФИ (проект 20-01-00293).

О ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДАХ ДЕКОМПОЗИЦИИ БАЗИСНЫХ ГРАФОВ В ЗАДАЧАХ ОЦЕНКИ ОДНОРОДНЫХ ПОТОКОВ В СЕТЯХ

Л.А. Пилипчук, Е.Н. Полячок, С.А. Ковалевский

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
{pilipchuk, fpm.polyachoEN1, fpm.kovalevsSA}@bsu.by

Задача минимизации размера множества M обозреваемых узлов сети с целью локализации специальных программируемых устройств (сенсоров) для сбора необходимой информации о функции потока [1, 2] относится к классу NP-полных задач [3]. Поиск оптимального решения (минимального числа обозреваемых узлов) с применением стратегий полного перебора сенсорных конфигураций узлов исследуемого класса NP-полных задач потребует огромных вычислительных затрат [3, 4]. Для больших сетей актуальной прикладной проблемой является поиск приемлемого числа обозреваемых узлов, что гарантировало бы ее полную наблюдаемость (субоптимальное решение) [4].

Введем в рассмотрение конечный, связный, ориентированный двунаправленный граф (сеть) $G = (I, U)$, где множество дуг U определено на прямом произведении $I \times I$, $|I| < \infty$, $|U| < \infty$. Обозначим x_{ij} – неизвестный дуговой поток дуги $(i, j) \in U$. Двунаправленный граф G обладает следующим свойством: если существует дуга $(i, j) \in U$ с дуговым потоком x_{ij}, то существует и дуга $(j, i) \in U$ с дуговым потоком x_{ji}. Функция потока $x : U \to R$ удовлетворяет следующей системе:

$$\sum_{j \in I_i^+(U)} x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-(U)} x_{ji} = \begin{cases} 0, & i \in I \setminus I^*, \\ x_i, & i \in I^*, \end{cases} \tag{1}$$

где x_i — внешний поток узла $i \in I^* \subseteq I$, x_{ij}, — дуговой поток на дуге $(i,j) \in U$, $I_i^+(U) = \{j \in I : (i,j) \in U\}$, $I_i^-(U) = \{j \in I : (j,i) \in U\}$. Для внешнего потока выполняется условие: $\sum_{i \in I^*} x_i = 0$. Для каждой дуги (i,j) известна доля $p_{ij} \in (0,1]$ суммарного потока $\sum_{j \in I_i^+(U)} x_{ij}$, проходящего через дугу $(i,j) \in U$. Для каждого узла $i \in I$ определим *каноническую* дугу (i,k), где $k \in I_i^+(U)$ и $p_{ik} \neq 0$. Заметим, что при заданных ограничениях канонической дугой может быть любая дуга, исходящая из узла i. Поскольку граф G — двунаправленный и $p_{ij} \in (0,1]$, $(i,j) \in U$, то для каждого узла $i \in I$ существует каноническая дуга (i,k), $k \in I_i^+(U)$ с ненулевым дуговым потоком x_{ik}.

В результате размещения специальных программируемых устройств (сенсоров) в обозреваемых узлах $M \subseteq I$ графа G получена следующая информация о функции потока:

$$\begin{gathered} x_{ij} = f_{ij}, j \in I_i^+(U), \;\; x_{ji} = f_{ji}, j \in I_i^-(U), \; i \in M; \\ x_i = f_i, \; i \in M \bigcap I^*; \end{gathered} \tag{2}$$

$$x_{ij} = \beta_{ij} f_{ik}, \; \beta_{ij} = \frac{p_{ij}}{p_{ik}}, \; j \in I_i^+(U) \setminus \{k\}, \; i \in I_k^-(U), \; k \in M. \tag{3}$$

Заметим, что в соотношении (3) $|I_i^+(U) \setminus \{k\}| \geq 1$.

По заданному множеству $M \subseteq I$ обозреваемых узлов графа G построим граф $\overline{G} = (\overline{I}, \overline{U})$ — ненаблюдаемую часть графа G. Удалим из графа G дуги и узлы, для которых известны численные значения (2), (3). Система для вычисления неизвестных дуговых потоков $x_{ij}, (i,j) \in \overline{U}$ и $x_i, i \in \overline{I}^* \subseteq I^*$ графа $\overline{G}$ примет следующий вид:

$$\sum_{j \in I_i^+(\overline{U})} x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-(\overline{U})} x_{ji} = \begin{cases} a_i, & i \in \overline{I} \setminus \overline{I}^*, \\ x_i + a_i, & i \in \overline{I}^*; \end{cases} \tag{4}$$

$$x_{ij} = \beta_{ij} x_{ik}, \; \beta_{ij} = \frac{p_{ij}}{p_{ik}}, \; j \in I_i^+(\overline{U}) \setminus \{k\}, \; |I_i^+(\overline{U})| > 1, i \in \overline{I}, \tag{5}$$

где $a_i, i \in \overline{I}$ — константы, полученные из системы (1) на основании априорной информации (2), (3), (i,k) — канонические дуги для узлов $i \in \overline{I}$.

Разреженная система (4), (5), сформированная по заданному множеству $M \subseteq I$ обозреваемых узлов графа G для определения дуговых потоков $x_{ij}, (i,j) \in \overline{U}$ и внешнего потока $x_i, i \in \overline{I}^*$ в узлах ненаблюдаемой части сети $\overline{G}$, может быть 1) *недоопределенной,* 2) *переопределенной,* или имеет 3) *единственное решение.* В [5] разработана конструктивная теория декомпозиции базисных графов для решения разреженных недоопределенных систем (4), (5). В случаях 1), 2) необходимо определить новое множество M обозреваемых узлов графа G, построить граф $\overline{G} = (\overline{I}, \overline{U})$ и систему вида (4), (5). Моделирование процесса построения множества $M \subseteq I$ обозреваемых узлов графа G и соответствующей системы (4), (5) завершается, когда ранг матрицы системы (4), (5) равен числу неизвестных. Итак, в случае 3) для множества M обозреваемых узлов графа G построен граф $\overline{G} = (\overline{I}, \overline{U})$ и соответствующая система (4) – (5) для определения численных значений дуговых потоков $x_{ij}, (i, j) \in \overline{U}$ и внешнего потока $x_i, i \in \overline{I}^*$. Граф $\overline{G} = (\overline{I}, \overline{U})$ — ненаблюдаемая часть графа $G = (I, U)$ — может быть несвязным. Некоторые компоненты связности графа $\overline{G}$ могут не содержать узлов из множества $\overline{I}^*$ с ненулевым внешним потоком. В этом случае базисный граф является остовным деревом. Для других компонент связности выполняется условие $\overline{I}^* \neq \emptyset$ и базисный граф — лес деревьев, свойства которого описаны в [4].

Теорема 1. *Субоптимальное решение. Пусть для связного двунаправленного орграфа G с функцией потока* (1), *содержащего $k = |I^*|$, $k \neq 0$ узлов с внешним потоком $x_i \neq 0, i \in I^*$ известны коэффициенты $p_{ij} \in (0, 1]$, $(i, j) \in U$ разбиения суммарного потока $\sum_{j \in I_i^+(U)} x_{ij}$, исходящего из каждого узла $i \in I$. Тогда для определения численных значений дуговых потоков графа G достаточно разместить $k = |I^*|$ сенсоров в узлах множества I^*.*

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1 приведено в [4].

По теореме 1 верхняя граница $\overline{h}$ интервала $[\underline{h}, \overline{h}]$, $\underline{h} = 1$, $\overline{h} = |I|$ изменения числа $|M|$ обозреваемых узлов графа $G = (I, U)$ субоптимального решения уменьшена до значения $\overline{h} = |I^*|$, $I^* \neq \emptyset$. Предложен новый подход к созданию численных методов декомпозиции базисных графов. В синтезе с современными инновационными технологиями разреженного матричного анализа, теории графов, теоретической информатики построены алгоритмические, структурные, технологические решения независимых подсистем с различными типами разреженности. Выполнены прикладные исследования задачи оценки множества M обозреваемых узлов сети G на реальных данных [4], анализ численной устойчивости решений разреженных систем линейных алгебраических уравнений с матрицами неполного и полного рангов.

Библиографические ссылки

1. *Gentili M., Mirchandani P.* Locating active sensors on traffic networks // Annals of Operation Research. 2006. Vol. 144. No. 1. P. 201–234.

2. *Bianco L., Confessore G., Gentili M.* Combinatorial Aspects of the Sensor Location Problem // Annals of Operation Research. 2006. Vol. 144. No. 1. P. 201–234.
3. *Bianco L., Confessore G., Reverberi P.* A network based model for traffic sensor location with implications on O/D matrix estimates // Transportation Science. 2001. Vol. 35. No. 1. P. 50–60.
4. *Пилипчук, Л.А., Пилипчук А.С., Полячок Е.Н., Фаразей А.И.* Идентификация сенсорной конфигурации и управление потоками // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2018. № 2. С. 67–76.
5. *Pilipchuk L.A., Malakhouskaya Y.V., Kincaid D.R., Lai M.* Algorithms of Solving Large Sparse Underdetermined Linear Systems with Embedded Network Structure // East-West J. of Mathematics. 2002. Vol. 4. No. 2. P. 191–201.

О КОЛЕБАНИЯХ УПРУГО ЗАКРЕПЛЕННОГО АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

Ю.Д. Селюцкий

НИИ механики МГУ, Москва, Россия
seliutski@imec.msu.ru

Введение. Различные механические системы, динамика которых определяется воздействием аэродинамических сил и сил упругости (так называемые аэроупругие системы), активно изучаются в течение многих десятилетий. Характерной особенностью поведения таких систем является возникновение в них автоколебаний при определенных условиях. Как правило (в задачах, связанных с динамикой летательных аппаратов или колебаний конструкций в потоке), этот эффект является нежелательным, поскольку он может привести к износу и разрушению объекта. Однако в последние годы активно изучается возможность использования подобных колебаний для преобразования энергии потока в полезные формы. Обзор иследований в этом направлении приведен, в частности, в [1].

1. Постановка задачи. Рассмотрим аэродинамический маятник (крыло с симметричным профилем, установленное на державке), точка подвеса которого упруго закреплена таким образом, что она может двигаться вдоль неподвижной горизонтальной прямой OY (см. рис. 1). Ось маятника вертикальна. Система помещена в стационарный поток среды, скорость которого горизонтальна и перпендикулярна OY.

Для описания аэродинамического воздействия на маятник используется квазистатический подход [2].

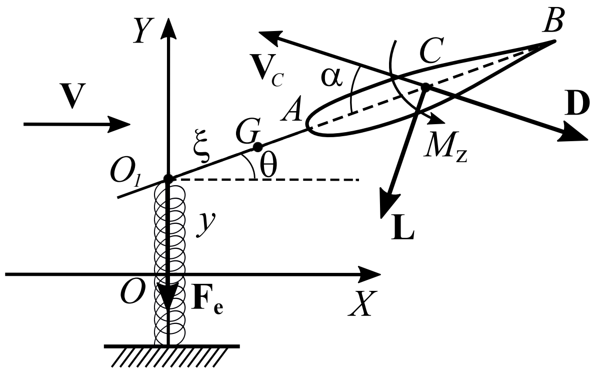


Рис. 1 — Аэродинамический маятник в упругом закреплении

Кроме того, предполагается, что сила F_e, действующая на точку подвеса маятника со стороны крепления, имеет следующий вид: $F_e = -ky - k_3y^3 - h\dot{y}$.

Тогда уравнения движения системы можно записать в следующем виде:

$$\begin{gathered} m\ddot{y} + m\xi\ddot{\theta}\cos\theta - m\xi\dot{\theta}^2\sin\theta = -ky - k_3y^3 - h\dot{y} - \\ -L\cos(\alpha-\theta) - D\sin(\alpha-\theta), \\ \left(J+\xi^2\right)\ddot{\theta} + m\xi\ddot{y}\cos\theta = M_z - Lr\cos\alpha - Dr\mathrm{sin}\alpha. \end{gathered} \qquad (1)$$

2. Обсуждение динамики объекта. Показано, что в пространстве параметров системы (1) существует область, где положение равновесия, в котором маятник ориентирован вдоль потока, неустойчиво. При этом в системе возникают колебания. Исследована эволюция этих колебаний при изменении таких параметров системы, как расстояние ξ от точки подвеса до центра масс G маятника, скорость V набегающего потока и коэффициент демпфирования h. Отметим, что коэффициент демпфирования при этом может рассматриваться как параметр, не только характеризующий диссипацию, но и моделирующий отбор энергии у потока для последующего преобразования ее в полезные формы. Получены оценки мощности, отбираемой у потока с помощью таких колебаний.

Работа выполнена в рамках НИР «Разработка методов исследования управляемых механических систем, взаимодействующих по сплошной средой» (АААА-А19-119012990123-0).

Библиографические ссылки

1. *McCarthy J.M., Watkins S., Deivasigamani A., John S.J.* Fluttering energy harvesters in the wind: A review // J. Sound & Vibration. 2016. Vol. 361. P. 355–377.

2. *Samsonov V.A., Dosaev M.Z., Selyutskiy Y.D.* 2013. Methods of qualitative analysis in the problem of rigid body motion in medium // Int. J. of Bifurcation & Chaos. 2013. Vol. 21. No. 10. P. 2955–2961.

АЛГОРИТМЫ ЭКСТРАПОЛЯЦИИ ИЗ ПРОШЛОГО И ОПЕРАТОРНОЙ ЭКСТРАПОЛЯЦИИ ДЛЯ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ

В.В. Семёнов

Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, Украина
semenov.volodya@gmail.com

Множество интересных и актуальных прикладных проблем могут быть записаны в форме вариационных неравенств. Особенно популярны эти постановки в математической экономике, математическом моделировании транспортных потоков и теории игр. Отметим, что часто негладкие задачи оптимизации могут эффективно решаться, если их переформулировать в виде седловых задач, а к последним применить алгоритмы решения вариационных неравенств. С появлением генерирующих состязательных нейронных сетей (generative adversarial network, GAN) устойчивый интерес к алгоритмам решения вариационных неравенств возник и в среде специалистов в области машинного обучения.

В докладе будет сделан обзор результатов работ [1–5], в которых предложены новые методы решения вариационных неравенств

$$\text{найти } x \in C: \ (Ax, y - x) \geq 0 \quad \forall y \in C,$$

где C — замкнутое выпуклое подмножество гильбертова пространства H, $A : H \to H$ — нелинейный монотонный или псевдомонотонный оператор.

Основное внимание будет уделено доказательству сходимости и формулировке новых вопросов. В частности, будут представлены новые результаты о сходимости для следующих алгоритмов.

Алгоритм 1. Экстраполяция из прошлого с адаптивной регулировкой.

Инициализация. Задаем параметр $\tau \in (0, 1/3)$, число $\lambda_1 > 0$ и элементы $y_0 \in H$, $x_1 \in \operatorname{int} \operatorname{dom} \varphi$.

Итерационный шаг. Вычисляем

$$\begin{cases} y_n = P_{x_n}^C \left(-\lambda_n A y_{n-1}\right), \\ x_{n+1} = P_{x_n}^C \left(-\lambda_n A y_n\right). \end{cases}$$

Если $y_n = x_n = x_{n+1}$, то СТОП, иначе

$$\lambda_{n+1} = \begin{cases} \min\left\{\lambda_n, \tau\frac{\|y_n - y_{n+1}\|}{\|Ay_n - Ay_{n-1}\|}\right\}, & \text{если } \ Ay_{n-1} \neq Ay_n, \\ \lambda_n, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Здесь и далее P_x^C — оператор проектирования

$$P_x^C(a) = \operatorname{argmin}_{y \in C}\left\{-(a, y - x) + V(y, x)\right\}, \ \ a \in H, \ \ x \in \operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi,$$

где $V(\cdot,\cdot)$ — дивергенция Брэгмана, соответствующая сильно выпуклой дифференцируемой по Фреше функции $\varphi : H \to \mathbb{R}$.

Алгоритм 2. Операторная экстраполяция с адаптивной регулировкой.

Инициализация. Задаем параметр $\tau \in (0, 1/2)$, числа λ_0, $\lambda_1 > 0$ и элементы $x_0 \in H$, $x_1 \in \operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi$.

Итерационный шаг. Вычисляем

$$x_{n+1} = P_{x_n}^C\left(-\lambda_n Ax_n - \lambda_{n-1}(Ax_n - Ax_{n-1})\right).$$

Если $x_{n-1} = x_n = x_{n+1}$, то СТОП, иначе

$$\lambda_{n+1} = \begin{cases} \min\left\{\lambda_n, \tau\frac{\|x_{n+1} - x_n\|}{\|Ax_{n+1} - Ax_n\|}\right\}, & \text{если } \ Ax_{n+1} \neq Ax_n, \\ \lambda_n, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке МОН Украины (проект 0119U100337) и НАН Украины (проект 0119U101608).

Библиографические ссылки

1. *Malitsky Yu.V., Semenov V.V.* An Extragradient Algorithm for Monotone Variational Inequalities // Cybernetics and Systems Analysis. 2014. Vol. 50. Issue 2. P. 271–277.
2. *Malitsky Y., Tam M.K.* A Forward-Backward Splitting Method for Monotone Inclusions Without Cocoercivity // SIAM Journal on Optimization. 2020. Vol. 30. No. 2. P. 1451–1472.
3. *Denisov S.V., Semenov V.V., Stetsyuk P.I.* Bregman Extragradient Method with Monotone Rule of Step Adjustment // Cybernetics and Systems Analysis. 2019. Vol. 55. Issue 3. P. 377–383.
4. *Vedel Y.I., Golubeva E.N., Semenov V.V., Chabak L.M.* Adaptive Extraproximal Algorithm for the Equilibrium Problem in the Hadamard Spaces // Journal of Automation and Information Sciences. 2020. Vol. 52. Issue 8. P. 46–58.
5. *Vedel Y.I., Denisov S.V., Semenov V.V.* An Adaptive Algorithm for the Variational Inequality Over the Set of Solutions of the Equilibrium Problem // Cybernetics and Systems Analysis. 2021. Vol. 57. Issue 1. P. 91–100.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ В МОДЕЛИ ДИНАМИКИ ПОПУЛЯЦИЙ С НЕСКОЛЬКИМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

М.А. Скворцова

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия
sm-18-nsu@yandex.ru

Рассматривается система дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, описывающая взаимодействие n видов микроорганизмов [1]:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}S(t) = (S^0 - S(t))D - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i(S(t))N_i(t), \\ \dfrac{d}{dt}N_i(t) = -D_iN_i(t) + \alpha_i p_i(S(t-\tau_i))N_i(t-\tau_i), \\ i = 1, 2, \ldots, n. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $N_i(t)$ — численность популяции i-го вида, $S(t)$ — концентрация питательного вещества. Коэффициенты системы S^0, D, D_i, α_i и параметры запаздывания τ_i предполагаются положительными и постоянными. Также предполагается, что функции $p_i(S)$ локально липшицевы, монотонно возрастающие и $p_i(0) = 0$.

В работе изучается асимптотическая устойчивость положений равновесия системы (1), соответствующих полному вымиранию и частичному выживанию популяций. Приведены условия на коэффициенты системы, параметры запаздывания и функции $p_i(S)$, при которых положения равновесия являются асимптотически устойчивыми, либо неустойчивыми. Указаны оценки на множества притяжения асимптотически устойчивых положений равновесия. Установлены оценки, характеризующие скорость стабилизации решений на бесконечности. При получении результатов использовались функционалы Ляпунова – Красовского [2].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-29-10086).

Библиографические ссылки

1. *Wolkowicz G.S.K., Xia H.* Global asymptotic behavior of a chemostat model with discrete delays // SIAM J. Appl. Math. 1997. V. 57. No. 4. P. 1019–1043.

2. *Демиденко Г.В., Матвеева И.И.* Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Вестник НГУ. Серия: математика, механика, информатика. 2005. Т. 5. № 3. С. 20–28.

АДАПТИВНАЯ ОПТИМАЛЬНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ ДИСКРЕТНОГО ОБЪЕКТА В ℓ_1-ПОСТАНОВКЕ

В.Ф. Соколов

Коми научный центр, Сыктывкар, Россия
vfs-t@yandex.ru

1. Задача адаптивной оптимальной робастной стабилизации. Управляемый объект описывается дискретной моделью

$$a(q^{-1})y_{t+1} = b(q^{-1})u_t + v_{t+1}\,, \quad t = 0, 1, 2, \dots\,, \tag{1}$$

где $y_t, u_t, v_t \in \mathbb{R}$ — выход объекта, управление и суммарное возмущение в момент времени t, q^{-1} — оператор сдвига назад ($q^{-1}y_t = y_{t-1}$), $a(\lambda) = 1 + a_1\lambda + \ldots + a_n\lambda^n$, $b(\lambda) = b_1 + b_2\lambda + \ldots + b_m\lambda^{m-1}$. Возмущение v в модели (1) удовлетворяет ограничениям

$$|v_t| \le \delta_w w_t + \delta_y p_t^y + \delta_u p_t^u\,, \quad \sup_{t\ge 0} |w_t| \le 1\,, \tag{2}$$

где δ_w — норма внешнего ограниченного возмущения $\delta_w w \in \ell_\infty$, $\delta_y \ge 0$ и $\delta_u \ge 0$ — коэффициенты усиления неопределенностей по выходу и управлению, $p_t^y = \max_{t-\mu\le k<t} |y_k|$, $p_t^u = \max_{t-\mu\le k<t} |u_k|$. Конечная память неопределенностей μ выбирается конструктором достаточно большой без ущерба для гарантируемого качества управления.

Априорная информация о модели. Неизвестны $\delta_w, \delta_y, \delta_u$ и вектор коэффициентов $\xi := (a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m)^T \in \Xi$, где Ξ — известный ограниченный многогранник, и для любого $\xi \in \Xi$ корни полинома $b(\lambda)$ лежат вне круга $\{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z| \le 1\}$.

Задача адаптивной оптимальной стабилизации заключается в построении обратной связи, минимизирующей с заданной точностью показатель качества

$$J_\mu(\theta) := \sup_v \limsup_{t\to+\infty} |y_t| \to \min\,, \quad \theta := (\xi^T, \delta_w, \delta_y, \delta_u)^T\,.$$

Для модели с известным вектором коэффициентов ξ регулятор

$$b(q^{-1})u_t = (a(q^{-1}) - 1)y_{t+1} \tag{3}$$

гарантирует равенство $y_{t+1} = v_{t+1}$ и, в силу непредсказуемости суммарного возмущения v, является *оптимальным.* Сложность рассматриваемой задачи заключается в требовании оптимальности управления в условиях неидентифицируемости вектора ξ.

2. Оптимальное полиэдральное оценивание. Для решения задачи используются идеи множественного оценивания неизвестных параметров [1] и метода рекуррентных целевых неравенств [2]. Полиэдральные оценки формируются на основе целевых неравенств

$$|\hat{a}(q^{-1})y_{t+1} - \hat{b}(q^{-1})u_t| \le \hat{\delta}_w + \hat{\delta}_y p^y_{t+1} + \hat{\delta}_u p^u_{t+1}\,,$$

эквивалентных описанию модели (1), (2) с вектором оценок параметров $\hat{\theta}$. Ключевым для обеспечения оптимальности адаптивного управления является оптимальное онлайн оценивание вектора θ, в котором идентификационным критерием служит наилучшая известная в ℓ_1-теории робастного управления асимптотическая (при $\mu \to +\infty$) верхняя оценка $J(\theta)$ показателя качества $J_\mu(\theta)$, имеющая вид [3]

$$J_\mu(\theta) \nearrow J(\theta) := \frac{\delta_w}{1 - \delta_y - \delta_u \|(a(\lambda) - 1)/b(\lambda)\|} \quad (\mu \to +\infty)\,, \qquad (4)$$

где символ $\nearrow$ означает монотонную сходимость снизу и $\|G(\lambda)\|$ обозначает ℓ_1-норму импульсной характеристики передаточной функции $G(\lambda)$. Предложена замена неизвестных параметров δ_y и δ_u неизвестным параметром $\delta = \delta_y + \delta_u \|(a(\lambda) - 1)/b(\lambda)\|$ позволяющая свести вычислительно сложную задачу оптимального онлайн оценивания с невыпуклым показателем $J(\theta)$ при линейных ограничениях и нелинейном ограничении $\delta_y + \delta_u \|(a(\lambda) - 1)/b(\lambda)\| < 1$ (условие робастной устойчивости) к задаче дробно-линейного программирования, легко решаемой с помощью современного программного обеспечения. Настоящая работа устраняет для рассмотренного класса моделей актуальнейший с 1980-х гг. разрыв между теориями робастного управления и идентификации систем [4].

Библиографические ссылки

1. *Куржанский А.Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977, 392 с.
2. *Фомин В.Н., Фрадков А.Л., Якубович В.А.* Адаптивное управление динамическими объектами. М.: Наука, 1981.
3. *Соколов В.Ф.* Адаптивное робастное управление дискретным скалярным объектом в ℓ_1-постановке // Автоматика и телемеханика. 1998. № 3. С. 107–131.

4. *Lamnabhi-Lagarrigue F., Annaswamy A., Engell C., et al.* Systems & Control for the future of humanity, research agenda: Current and future roles, impact and grand challenges // Annual Reviews in Control. 2017. Vol. 43. P. 1–64.

МЕТОДЫ ЛИНЕЙНОГО И ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ БЕЗОПАСНОГО СЛИЯНИЯ ПОТОКОВ САМОЛЕТОВ

А.А. Спиридонов, С.С. Кумков

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского, УрО РАН,
Екатеринбург, Россия
spiridonov@imm.uran.ru, sskumk@gmail.com

Практическая задача. Воздушное сообщение является важной частью пассажирских и грузовых перевозок. Движение самолетов организовано вдоль воздушных трасс, которые могут расходиться и сходиться. В точках соединения трасс возникает задача безопасного слияния потоков воздушных судов (ВС). Особенно важной эта задача является вблизи аэропортов для потоков ВС, прилетающих в данный аэропорт, так как эти потоки могут быть весьма плотными.

Соответственно, основной задачей является назначение новых моментов прибытия ВС в точку слияния. Назначенные моменты должны быть такими, что в результирующей очереди между соседними судами имеются достаточные временны́е промежутки, обеспечивающие отсутствие опасных сближений.

Выбор моментов прибытия должен быть согласован с промежутком возможного варьирования прибытия ВС. Этот промежуток обуславливается возможностью ускорения и задержки самолета вследствие изменения скорости его движения, а также наличия на маршруте его движения различных схем задержки или участков спрямления.

Кроме того, при выработке новых моментов прибытия должны учитываться различные практические запросы диспетчеров управления воздушным движением (УВД). Основное требование — минимизация отклонения назначенного момента прибытия от номинального, обуславливаемая минимизацией затрат горючего на маневры ВС. Кроме того, могут быть и другие требования, например, минимизация количества взаимодействий диспетчер – пилот. Или в случае варьирования момента прибытия вариация должна быть не слишком малой, так как малые вариации нетехнологичны. Могут накладываться ограничения на смену порядка прибытия ВС в точку слияния потоков и др.

Математические модели задачи слияния. Задача безопасного слияния потоков судов весьма активно изучается математиками достаточно давно, по крайней мере, с 1970-х годов. Чаще всего задача формализуется в рамках теории конечномерной оптимизации. Обзоры теоретических и вычислительных аспектов такого рода задач изложены в [1–4].

Традиционно оптимизируемым критерием в подобных задачах является сумма модулей отклонений назначенных моментов прибытия ВС от номинальных. Это естественно, поскольку такой критерий наиболее простым образом отражает основное требование к назначенным моментам прибытия. Также могут использоваться двухзонные кусочно-линейные функции штрафов отклонений, похожие на модуль, но имеющие разные угловые коэффициенты левой и правой ветвей. Такие критерии отражают разные траты горючего при ускорении и замедлении момента прибытия.

При этом прочие требования, упоминавшиеся выше, учитываются каким-то иным способом: введением векторных или стохастических критериев, введением иерархических задач оптимизации, рассмотрением задач теории расписаний. Получаемые постановки зачастую оказываются настолько тяжелыми, что приходится отказываться от точных методов решения в пользу разного рода усеченных методов динамического программирования или дискретных переборов, генетических алгоритмов или эвристических методов.

В своей работе авторы предлагают критерии, отражающие основные требования диспетчеров УВД и при этом позволяющие формализовать задачу в рамках линейного или целочисленного программирования, точные численные методы которых разработаны в достаточной степени. Приводятся результаты численного моделирования, показывающие адекватность предлагаемых формализаций.

Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре.

Библиографические ссылки

1. *Bennell J.A., Mesgarpour M., Potts C.N.* Airport runway scheduling // 4OR – Quarterly Journal of Operations Research, 2011. Vol. 9. No. 2. P. 115–138.
2. *Zulkifli A., Aziz N.A.A., Aziz N.H.A., Ibrahim Z., Mokhtar N.* Review on computational techniques in solving aircraft landing problem // Proceedings of the 2018 International Conference on Artificial Life and Robotics, Oita, Japan, 2018. P. 128–131.
3. *Вересников Г.С., Егоров Н.А., Кулида Е.Л., Лебедев В.Г.* Методы построения

оптимальных очередей воздушных судов на посадку. Ч. 1. Методы точного решения // Проблемы управления. 2018. № 4. С. 2–13.

4. *Вересников Г.С., Егоров Н.А., Кулида Е.Л., Лебедев В.Г.* Методы построения оптимальных очередей воздушных судов на посадку. Ч. 2. Методы приближенного решения // Проблемы управления. 2018. № 5. С. 2–13.

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ НА ПОДМНОЖЕСТВАХ ДОПУСТИМЫХ УПРАВЛЕНИЙ

В.А. Срочко

Иркутский государственный университет, Иркутск, Россия
srochko@math.isu.ru

Различные технологии преобразования задач оптимального управления к конечномерным моделям имеют давнюю историю. Такой априорный переход от вариационных проблем к задачам математического программирования, весьма популярный в зарубежных публикациях, встречал определенную критику и неприятие со стороны ряда отечественных специалистов по численным методам оптимального управления.

Однако ситуация в этой области несколько модифицируется в последние годы, когда новые методы дискретизации (параметризации) управления приобретают практическую актуальность и конкурентность в сравнении с традиционными алгоритмами решения задач оптимального управления [1].

В отношении разнообразных редукций вариационных задач к конечномерным необходимо отметить следующее.

С одной стороны такие преобразования снижают качество получаемых результатов, поскольку экстремальные решения конечномерных задач (удовлетворяющие необходимым условиям экстремума) не приводят, вообще говоря, к экстремальным управлениям вариационных задач (удовлетворяющим принципу максимума). Конечно, качество конечномерных решений можно повысить за счет уменьшения шага параметризации, однако определенный разрыв между вариационным и конечномерным решениями всегда сохраняется (поточечные неравенства, интегральные неравенства).

Кроме того, вариационные методы имеют определенные преимущества, поскольку используют незаурядные результаты теории оптимального управления. Это, прежде всего, необходимые и достаточные условия оптимальности, не имеющие аналогий в конечномерных задачах.

С другой стороны, современные методы конечномерной оптимизации в совокупности с мощным программным обеспечением в немалой степени превосходят уровень соответствующих методов оптимального управления, особенно в рамках решения невыпуклых задач.

Не случайно, достаточно эффективные методы программного и позиционного решения линейных задач оптимального управления связаны с дискретизацией (параметризацией) управления и переходом к специальным задачам линейного программирования [2, 3].

В общем плане можно утверждать, что приемлемая редукция к конечномерным задачам специальной структуры повышает возможности приближенного решения избранных задач оптимального управления.

В докладе рассматривается ряд задач оптимального управления (квадратичный и билинейный функционалы) относительно линейной фазовой системы. Аппроксимация управления проводится в классе кусочно-постоянных и кусочно-линейных функций и оформляется как линейная комбинация специального набора опорных функций.

Получены явные выражения для избранных функционалов через параметры аппроксимаций. В результате сформулирована в явном виде серия квадратичных задач математического программирования с простейшими ограничениями на переменные. Важно отметить, что используемая параметризация сохраняет свойство выпуклости исходной задачи оптимального управления.

При этом популярная задача на максимум нормы конечного состояния после параметризации допускает глобальное решение в результате конечного перебора угловых точек в сочетании с процедурами линеаризации целевой функции и улучшения экстремальных точек. Кроме того, невыпуклая линейно-квадратичная задача оптимального управления с параметром при квадрате управления в функционале при определенном условии на параметр (оценка снизу) аппроксимируется в конечномерном варианте выпуклой квадратичной задачей, которая допускает решение за конечное число итераций.

Библиографические ссылки

1. *Срочко В.А.* Итерационные методы решения задач оптимального управления. М.: Физматлит, 2000.
2. *Балашевич Н.В., Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Численные методы программной и позиционной оптимизации линейных систем управления // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2000. Т. 40. № 6. С. 838–859.

3. *Габасов Р., Дмитрук Н.М., Кириллова Ф.М.* О некоторых проблемах оптимального управления динамическими системами в реальном времени // Динамические системы, оптимальное управление и математическое моделирование. Материалы международного симпозиума. Иркутск: Изд-во ИГУ. 2019. С. 19–22.

ВАРИАЦИОННЫЕ ПОДХОДЫ К РЕШЕНИЮ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ

Н.Н. Субботина, Е.А. Крупенников

ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия

УРФУ, Екатеринбург, Россия

subb@uran.ru, krupennikov@imm.uran.ru

Введение. Доклад посвящен решению задачи реконструкции управления (ЗРУ) для динамической системы по неточным дискретным замерам наблюдаемой траектории движения, порождаемой этим управлением.

Рассматриваются детерминированные динамические системы, аффинные по управлениям. Допустимые управления — измеримые функции со значениями из выпуклого компакта. Эта задача в общем случае некорректна. Вводится понятие нормального управления — допустимого управления, порождающего наблюдаемую траекторию и имеющего минимальную норму в пространстве $\mathbb{L}^2$. Показано [1], что, при достаточно общих предположениях, для любой траектории, порожденной допустимым управлением, существует единственное нормальное управление. Под ЗРУ подразумевается задача реконструкции именно нормального управления.

Среди подходов к решению ЗРУ отметим подход, предложенный Ю. С. Осиповым и А. В. Кряжимским [2], базирующийся на процедуре оптимального прицеливания.

Предлагаемый авторами доклада подход [1] основан на вспомогательных вариационных задачах на минимум регуляризованного [3] интегрального функционала невязки. Особенность подхода — использование выпукло-вогнутых функционалов. Показано, что предлагаемые реконструкции управлений обеспечивают колебательный характер движения системы около наблюдаемого движения.

В докладе обосновывается использование выпукло-вогнутых функционалов. Обсуждаемый подход сравнивается с его вариацией, использующей классические (выпуклые) функционалы.

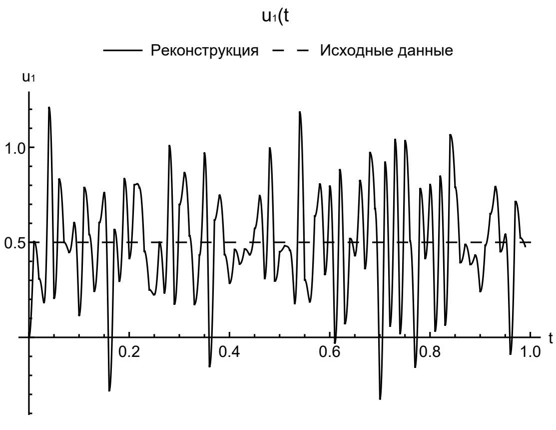
1. Сравнение подходов. Предлагаемый подход основан на использовании необходимых условий оптимальности во вспомогательных задачах вида

$$I(x(\cdot),u(\cdot))=\int\limits_{t_1}^{t_2}\left[c\frac{\|x(t)-y^{\delta}(t)\|^2}{2}+\frac{\alpha^2\|u(t)\|^2}{2}\right]dt\longrightarrow\min,\qquad(1)$$

где $c=-1$, а α — малый регуляризирующий (по Тихонову [3]) параметр. Функция $y^{\delta}(t)$ является гладкой интерполяцией дискретных замеров. Алгоритм решения ЗРУ, основанный на этом подходе, подробно описан и обоснован в [1]. В данном докладе приводится сравнение его эффективности с другим алгоритмом, основанным на аналогичном подходе, но с выпуклым функционалом (при $c=1$). В частности, сравнение демонстрируется на модельном примере с динамикой

$$\dot{x}(t)=u_1(t)+u_2(t),\quad x\in\mathbb{R},\quad u\in\mathbb{R}^2,\quad t\in[0,1],\quad x^*(t)=t.\qquad(2)$$

Базовая траектория $x^*(t)=t$ была возмущена случайным образом с максимальной погрешностью $\delta=0.01$ с шагом $h^{\delta}=0.01$ для получения точек замеров, являющихся входными данными ЗРУ. На основании этих данных была проведена реконструкция нормального управления $u^*(t)\equiv(0.5,0.5)^{\top}$ с помощью обоих подходов. Результат реконструкции управления $u_1^*(\cdot)$ при $c=-1$ представлен на рис. 1. При $c=1$ — на рис. 2.



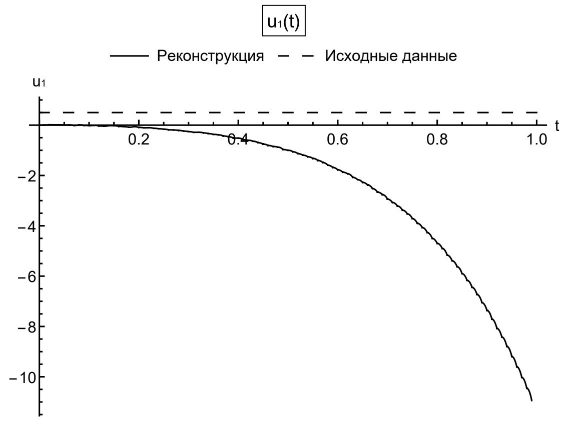


Рис. 1. Реконструкция при $c=-1$. Рис. 2. Реконструкция при $c=1$.

Приводится аналитическое пояснение колебательного и экспоненциального характера решений при использовании соответственно выпукло-вогнутого и выпуклого функционалов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 20-01-00362).

Библиографические ссылки

1. *Subbotina N.N., Krupennikov E.A.* Hamiltonian Systems for Dynamic Control Reconstruction Problems // Minimax Theory and its Applications. 2020. Vol. 5. No. 2. P. 439–454.
2. *Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.* О моделировании управления в динамической системе // Изв. АН СССР. Сер. техн. кибернетика, 1983. № 2. С. 51—60.
3. *Тихонов А.Н.* Об устойчивости обратных задач // Докл. АН СССР. 1943. Т. 39, № 5. С. 195–198.

ЭФФЕКТИВНЫЕ МЕТОДЫ МИНИМИЗАЦИИ ВЫПУКЛОЙ КУСОЧНО-АФФИННОЙ ФУНКЦИИ

Г.Ш. Тамасян[1,2], Г.С. Шульга[3]

[1] Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

[2] Институт проблем машиноведения РАН, Россия
g.tamasyan@spbu.ru

[3] Академический лицей ФТШ, Санкт-Петербург, Россия
gdextrous@gmail.com

В докладе пойдет речь об эффективных методах решения задачи минимизации выпуклой кусочно-аффинной функции, заданной в виде суммы модулей от аффинных функций [1].

В скалярном случае глобальный минимум находится с помощью средств дискретной математики. Точнее, решением задачи является взвешенная медиана множества всех вершин ломаной, на поиск которой уходит линейное время.

В общем случае, применяя инструментарий конструктивного негладкого анализа [2], получен критерий глобального минимума. Показывается, что рассматриваемая задача может быть сведена к последовательному решению двух задач. Первая задача линейного программирования, а вторая — решение одного негладкого алгебраического уравнения. Более того, и вторая задача может быть сведена к решению системы линейных неравенств, что в свою очередь также относится к задачам линейного программирования.

Общеизвестно, что исходная задача изначально может быть сведена к задаче линейного программирования, однако предложенный подход имеет преимущество в том, что размерности двух задач линейного программирования в два раза меньше.

Работа выполнена в Институте проблем Машиноведения РАН при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 20-71-10032).

Библиографические ссылки

1. *Тамасян Г.Ш., Шульга Г.С., Удот М.В.* О задаче минимизации суммы модулей аффинных функций // Процессы управления и устойчивость. 2019. Т. 6, № 1. С. 471–475.
2. *Демьянов В.Ф., Рубинов А.М.* Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: «Наука», 1990. 432 с.

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ С ИМПУЛЬСНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

М. Тухтасинов, А.М. Полатов, Б.Х. Хайиткулов

Национальный Университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан
mumin51@mail.ru, asad3@yandex.ru, b.hayitqulov@mail.ru

В данной работе рассмотрена нелинейная конфликтно-игровая задача преследования при этом на управления убегающего накладывается интегральное ограничение, а преследователь использует импульсное управление. Эти импульсные воздействия на объект осуществляются в заранее заданных моментах времени, и соответствующее управление представляется при помощи дельта-функции Дирака. Терминальное множество представляется в виде цилиндра. Для доказательства достижения нижней грани функционала применена теория опорных функций. Благодаря этому факту, вместо “квазистратегии” применяется почти стробоскопическая стратегия и указан способ построения этой стратегии.

Пусть $\Omega(R^n)$ — пространство, состоящее из всех непустых компактных подмножеств пространства R^n [1, стр. 19], $C(W,\cdot) : R^n \to R$ — опорная функция непустого компактного подмножества W пространства R^n [1, стр. 31].

Определение 1. *Пусть V подмножество банахова пространства B. Многозначное отображение $W : V \to \Omega(R^n)$ назовем слабо полунепрерывным снизу в точке $v \in V$, если для любой последовательности $\{v_n\}$, которая слабо сходится к v, имеет место неравенство $C(W(v),\psi) \le \varliminf_{n\to\infty} C(W(v_n),\psi)$ при каждом $\psi \in R^n$ [1].*

Лемма 1. *Пусть $M \in \Omega(R^n)-$ выпуклое множество, $W : V \to \Omega(R^n)-$ выпуклозначное слабо полунепрерывное снизу многозначное отображение, кроме того $0 \in intW(v)$, $v \in V$, где $V-$ слабо компактное подмножество банахово пространства B. Тогда функционал $\alpha(v)$, $v \in V$, определяемый следующим образом*

$$\alpha(v) = \begin{cases} \max\Big\{\alpha \geq 0 : \alpha M \cap W(v) \neq \emptyset\Big\}, \text{ } \textit{при } 0 \notin M, \\ 1, \text{ } \textit{при } 0 \in M, \end{cases} \tag{1}$$

слабо полунепрерывен снизу на множестве V [2, 3].

Рассмотрим следующую конфликтно-управляемую задачу

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= (\|v\|^2 + 1)z_2 + v \\ \dot{z}_2 &= u, \end{aligned} \tag{2}$$

где z_1, z_2, v, $u \in R^n$.

Предположим, что преследователь может воздействовать на систему (2) только в моменты $\{\tau_i\}, i = 0, 1, ..., \tau_0 = 0$, и его воздействие в эти моменты имеет импульсный характер, что выражается при помощи дельта-функции Дирака:

$$u(t) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \delta(t - \tau_i), \tag{3}$$

где вектор скачков u_i выбирается из единичного шара $S_1(0)$ с центром в нуле пространства R^n.

Управлением убегающего игрока являются n-мерные измеримые вектор функции $v(\cdot)$, которые при каждом i, $i = 0, 1, ...$, удовлетворяют интегральному ограничению

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} ||v(\tau)||^2 \, d\tau \leq \sigma^2.$$

Задача преследователя состоит в том, чтобы, определенным образом выбирая управления $u_i \in U$, за конечное время вывести траекторию системы (2) на цилиндрическое терминальное множество M^*, которое имеет вид

$$M^* = M^0 + M,$$

где $M^0 = \{(0, z_2) : z_2 \in R^n\}$, M — подмножество подпространства $M^{0\perp}$.

Теорема 1. *Пусть $\tau_0 < \tau_1 < ... < \tau_m \to \infty$(без конечных точек сгущения) и M — выпуклое компактное множество, тогда в игре* (3) *возможно преследование из любой начальной точки $z^0 = (z_1^0, z_2^0) \in R^{2n}$.*

Библиографические ссылки

1. *Благодатских В.И.* Введение в оптимальное управление. М.: Высш.шк., 2001.
2. *Тухтасинов М.* Линейная дифференциальная игра преследования с импульсными и интегрально-ограниченными управлениями игроков // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22. № 3. С. 273–282.
3. *Чикрий А.А., Матичин И.И.* Линейные дифференциальные игры с импульсным управлением игроков // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2005. Т. 11. № 1. С. 212–224.

МНОГОМЕТОДНЫЕ АЛГОРИТМЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СЛОЖНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

А.И. Тятюшкин

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН, Иркутск, Россия

tjat@icc.ru

Многометодная технология решения задач оптимального управления [1] заключается в параллельном использовании сразу несколько итерационных методов оптимизации для поиска решения одной и той же задачи. Основной проблемой применения многометодной технологии при численном решении задач оптимального управления является выбор метода для эффективного продолжения процесса оптимизации с того момента, когда ухудшилась сходимость текущего метода. Современные операционные системы позволяют обеспечить решение задачи путем организации параллельных вычислительных потоков для одновременного проведения расчетов несколькими методами. В каждом таком потоке можно реализовывать итерационный процесс одного из методов оптимизации и решение одной задачи вести несколькими методами одновременно. На многопроцессорных компьютерах для реализации каждого метода удобнее использовать отдельный процессор. После нахождения очередного приближения все методы оцениваются, например, по полученному приращению функционала, и из них выбирается наиболее эффективный метод для продолжения оптимизации, а полученное этим методом приближение передается остальным методам в качестве начального для выполнения следующей итерации.

Продолжая итерационный процесс до получения приближения, на котором с заданной точностью будет выполнен критерий оптимальности, найдем приближенное решение задачи. При этом решение будет найдено многометодным алгоритмом, состоящим из последовательности шагов разных методов, подключаемых к процессу оптимизации с целью ускорения его сходимости. Например, в случае параллельного использования трех методов (см. рис. 1) лучшее приближение будет определяться по максимуму приращения функционала, полученного на данной итерации каждым из трех методов: $u_{i_0} = \arg\max\limits_{i\in\{1,2,3\}}(I(u_i^k) - I(u_i^{k-1}))$. Затем это приближение передается всем трем методам для выполнения следующей итерации: $u_i^{k+1} = u_{i_0}$, $i = 1, 2, 3$.

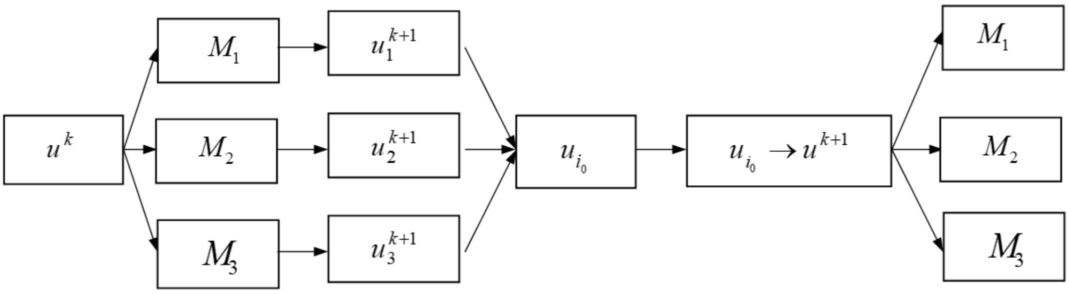


Рис. 1 — Схема выполнения $k + 1$-й итерации многометодным алгоритмом для группы из трех методов M_1, M_2, M_3.

Таким образом, многометодная технология решения прикладных задач оптимального управления, реализованная в виде параллельных итерационных процессов оптимизации с выбором лучшего приближения, находит решение задачи с автоматическим применением разных методов оптимизации и тем самым существенно повышает эффективность поиска и надежность получения численного решения с заданной точностью в прикладных задачах оптимального управления.

Программное обеспечение, разработанное на основе данного подхода и реализующее многометодную технологию расчета оптимального управления и оптимальных параметров, успешно применяется для решения сложных прикладных задач оптимального управления из различных областей науки и техники [2]. Применение эффективной технологии расчета управления особенно актуально в управляемых системах реального времени, например, в системах управления летательными аппаратами, обладающих высокой маневренностью. Например, при проектировании истребителя СУ-57 (мирового лидера по маневренности) для решения серии задач оптимального маневрирования [3] использовалось программное обеспечение, описанное в [1].

Библиографические ссылки

1. *Тятюшкин А.И.* Многометодная технология оптимизации управляемых систем. Теория управления движением. Новосибирск: Наука, 2006.

2. *Тятюшкин А.И.* Многометодная оптимизация управления в сложных прикладных задачах // Журнал вычисл. математики и матем. физики. 2019. Т. 59. № 2. С. 235–246.

3. *Тятюшкин А.И., Федунов Б.Е.* Возможности защиты от атакующей ракеты задней полусферы самолета вертикальным маневром // Известия РАН, ТиСУ. 2006. № 1. С. 111–125.

ОЦЕНИВАНИЕ ЗВЕЗДНЫХ МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ ДЛЯ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ С НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ И НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ

Т.Ф. Филиппова, О.Г. Матвийчук

Институт математики и механики им. Н.Н.Красовского УрО РАН,

Екатеринбург, Россия

{ftf,vog}@imm.uran.ru

Введение. Рассматриваются задачи оценивания множеств достижимости нелинейной управляемой динамической системы при неполной информации о начальных состояниях и параметрах. Исследования основываются на классических результатах математической теории управления и оценивания состояний в условиях неопределенности [1–3] и направлены на изучение эволюционных уравнений для новых классов динамических систем.

Предполагается, что динамические уравнения рассматриваемой здесь управляемой системы содержат два вида нелинейности, а именно, в фазовых скоростях системы одновременно присутствуют как квадратичные функции фазовых координат, так и неопределенные матрицы коэффициентов [4–6]. Такие системы могут моделировать различные механические, электрические и другие типы систем, параметры которых неизвестны, но могут варьироваться в определенных (заданных) пределах. Отметим, что в конкретных прикладных задачах множества состояний системы обычно невыпуклы, но в ряде случаев обладают особыми свойствами (например, являются звездными). В связи с этим представляется полезным найти оценки точных множеств достижимости, учитывающие указанное свойство.

1. Постановка задачи. Рассматривается нелинейная управляемая система

$$\dot{x}(t) = A(t)x + x'Bx \cdot d + u(t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [t_0, T], \tag{1}$$

где матрица B предполагается симметричной и положительно определенной, вектор $d \in \mathbb{R}^n$ задан. Предполагается, что

$$A(t) = A^0 + A^1(t) \in \mathcal{A} = A^0 + \mathcal{A}^1, \quad t \in [t_0, T],$$

где симметрическая положительно определенная матрица A^0 задана; матрица $A^1(t)$ неизвестна, но ограничена ($t \in [t_0, T]$):

$$A^1(t) \in \mathcal{A}^1 = \big\{A = \{a_{ij}\} \in \mathbb{R}^{n\times n} : |a_{ij}| \le c_{ij},\ i, j = 1, \dots n\big\},$$

числа $c_{ij} \ge 0$ $(i, j = 1, \dots, n)$ заданы. Начальные состояния точно не известны, но принадлежат данному звездному симметричному невырожденному многограннику $M(p)$ с $2m$ вершинами $(m \ge n)$ и центром $p \in \mathbb{R}^n$: $x_0 \in X_0 = M(p)$. Управляющие функции $u(t)$ измеримы по Лебегу на $[t_0, T]$ и удовлетворяют ограничению $u(t) \in U = E(\hat{a}, \hat{Q})$ для п.в. $t \in [t_0, T]$, где $E(\hat{a}, \hat{Q})$ — эллипсоид с центром $\hat{a} \in \mathbb{R}^n$ и симметрической положительно определенной $n \times n$ матрицей $\hat{Q}$. В данных информационных условиях возникает основная, исследуемая здесь задача управления и оценивания для многозначных состояний системы с нелинейностью и неопределенностью – сечений траекторной трубки

$$\begin{gathered} X(t; u(\cdot)) = \big\{x(\cdot)\mathbb{R}^n :\ \exists x_0 \in X_0,\ \exists A(\cdot) \in \mathcal{A}, \\ x = x(t) = x(t; u(\cdot), A(\cdot), x_0)\big\}, \quad t \in [t_0, T], \quad u(\cdot) \in U. \end{gathered} \tag{2}$$

2. Основные результаты. На основе базовых подходов теории эллипсоидального оценивания [1, 2, 3] и результатов [4, 5, 6], в данной работе предложены новые вычислительные алгоритмы построения внешних эллипсоидальных оценок траекторных трубок (2) и их сечений — множеств достижимости системы (1) в пространстве $\mathbb{R}^n$. Разработанные итерационные алгоритмы оценивания проиллюстрированы модельными примерами.

Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Минобрнауки России.

Библиографические ссылки

1. *Kurzhanski A.B., Varaiya P.L.* Dynamics and Control of Trajectory Tubes: Theory and Computation. Basel: Birkhauser, 2014.
2. *Черноусько Ф.Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем: метод эллипсоидов. М.: Наука, 1988.
3. *Ананьев Б.И., Гусев М.И., Филиппова Т.Ф.* Управление и оценивание состояний динамических систем с неопределенностью. Новосибирск: СО РАН, 2018.

4. *Филиппова Т.Ф., Матвийчук О.Г.* Динамика многозначных оценок множеств достижимости управляемых систем с билинейной неопределенностью // Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация (DSSCO'18). Минск: БГУ, 2018. С. 212–213.
5. *Filippova T.F.* Control and estimation for a class of impulsive dynamical systems // Ural Mathematical Journal. 2019. Vol. 5. No. 2. P. 21–30.
6. *Matviychuk O.G.* On ellipsoidal estimates for reachable sets of the control system // Lecture Notes in Computer Science, Vol. 11548, Springer, 2019. P. 489—500.

ПРИНЦИП ИНВАРИАНТНОСТИ И ГЛОБАЛЬНАЯ АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ДЛЯ СИСТЕМ С СУХИМ ТРЕНИЕМ

И.А. Финогенко

Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН, Иркутск, Россия
fin@icc.ru

Рассматривается асимптотическое поведение механических систем, представленных уравнениями Лагранжа второго рода, с кулоновыми силами трения. Методы исследований непосредственно связаны с прямым методом Ляпунова со знакопостоянными производными функций Ляпунова и с методом предельных уравнений применительно к неавтономным системам (см. [1]).

Первоначально автономные системы со знакопостоянными производными функций Ляпунова изучались в известных работах Е.А. Барбашина и Н.Н. Красовского [2] об асимптотической устойчивости при дополнительном предположении об отсутсвии целых траекторий системы в окрестности начала координат — положения равновесия. Если избавиться от этого предположения, то можно утверждать, что ω-предельные множества решений лежат во множестве нулей производной функции Ляпунова. Эти выводы в дальнейшем получили развитие в работах Ла-Салля и в настоящее время известны, как принцип инвариантности (см. [3]). Принцип инвариантности является эффективным средством исследования вопросов притяжения и глобальной асимптотической устойчивости различных классов систем при наиболее слабых предположениях на свойства функций Ляпунова.

В данной работе мы рассматриваем специальный класс разрывных систем, а именно — механические системы с сухим трением, представленные уравнениями Лагранжа второго рода с k степенями свободы

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_a}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T_a}{\partial q^i} = Q_i^T + Q_i^A, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Мы делаем предположение о зависимости коэффициентов трения от времени t, которая может возникать по разным причинам, таким, как изменение температуры и иных характеристик трущихся тел. Кинетическая энергия системы T_a представляет собой сумму $T_a = T + T_1 + T_0$ положительно определенной квадратичной формы

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} a_{ij}(q)\dot{q}^i\dot{q}^j$$

обобщенных скоростей с симметричной матрицей $A(q) = [a_{ij}(q)]_1^k$, линейной формы обобщенных скоростей $T_1 = \sum_{i=1}^{k} a_i(q)\dot{q}^i$ и функции $T_0(q)$.

Предполагаем, что обобщенные силы трения скольжения при условии $\dot{q}^s \neq 0$ имеют вид

$$Q_s^T(q, \dot{q}) = -f_s(t, q^s, \dot{q}^s) \mid N_s(q, \dot{q}) \mid sgn\, \dot{q}^s.$$

Здесь $\mid N_s(q, \dot{q}) \mid$ — модули нормальных реакций в точках соприкосновения трущихся тел, $f_s(t, q, \dot{q}) > 0$ — коэффициенты трения, $1 \leq s \leq k_* \leq k$. Более детальное описание систем с трением можно найти в [4].

Активные силы Q_i^A, действующие на систему, представляет собой сумму потенциальных и диссипативных сил. В своих исследованиях мы используем результаты работ [5], [6], представляющие собой некоторые аналоги принципа инвариантности Ла-Салля применительно к дифференциальным включениям и разрывным системам.

Работа выполнена в рамках госзадания Минобрнауки России по проекту "Теория и методы исследований эволюционных уравнений и управляемых систем с их приложениями"(№ гос. регистрации: 1210401300060-4).

Библиографические ссылки

1. *Мартынюк А.А., Като Д., Шестаков А.А.* Устойчивость движения: метод предельных уравнений. Киев: Наук. думка, 1990.
2. *Барбашин Е.А.* Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970.

3. *Руш Н., Абетс М., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980.
4. *Матросов В.М.* Метод векторных функций Ляпунова: анализ динамических свойств нелиненйных систем. М.: Физматлит, 2001.
5. *Финогенко И.А.* Предельные дифференциальные включения и принцип инвариантности неавтономных систем // Сибирский Мат. журнал. 2014. Т. 55. № 2. С. 454–471.
6. *Финогенко И.А.* Принцип инвариантности для неавтономных дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями // Сибирский Мат. журнал. 2016. Т. 57. № 4. С. 913–927.

О ПОЗИЦИОННЫХ ИМПУЛЬСНЫХ УПРАВЛЕНИЯХ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

И.А. Финогенко[1], А.Н. Сесекин[2]

[1] Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН, Иркутск, Россия
fin@icc.ru

[2] Уральский федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия
sesekin@list.ru

Исследуется управляемая система, представленная в форме дифференциального включения

$$\dot{x} \in F(t,x) + u, \tag{1}$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$, $t \in [t_0, \theta)$, u — управляющее воздействие, задаваемое некоторым абстрактным оператором, сопоставляющим каждому текущему моменту времени t и состоянию объекта x импульс $p(t,x)\delta_t$, $p(t,x)$ — интенсивность импульса. «Бегущий импульс», как обобщенная функция, смысла не имеет и означает лишь тот факт, что в системе (1) функционирует импульсное управление, подразумевающее дискретную реализацию в виде последовательности корректирующих импульсов, сосредоточенных в точках $h : t_0 < t_1 < \dots < t_N = \theta$ разбиения отрезка I. Результатом такой последовательной коррекции является разрывная кривая $x^h(\cdot)$, называемая ломаной Эйлера, по определению совпадающая на промежутках $(t_k, t_{k+1}]$ с решением задачи Коши

$$\dot{x} \in F(t,x), \quad x(t_k) = x^h(t_k) + p\big(t_k, x^h(t_k)\big),\ k = 1, \dots, N-1,$$

где $x^h(t_0) = x_0$. Рассматривается случай, когда в результате действия корректирующего импульса в момент времени t_k предельная справа точка $(t_k, x(t_k + 0))$ интегральной кривой, соответствующей ломаной Эйлера, оказывается на некотором многообразии $S = \{(t,x) \in R^{n+1} : \sigma^j(t,x) = 0,\ j = \overline{1,m}\}$. Сеть ломаных Эйлера называется импульсно-скользящим режимом, а траектории $r(\cdot)$, предельные для равномерно сходящихся на промежутке $(t_0, \theta]$ последовательностей ломаных Эйлера — идеальными (предельными) импульсно-скользящими режимами.

Построено дифференциальное включение вида

$$\dot{x} \in F(t,x) + B(t,x)\tilde{u}(t,x), \tag{2}$$

где $\tilde{u}(t,x)$ — позиционное разрывное на множестве S управление релейного типа, для которого идеальный импульсно-скользящий режим является обычным скользящим режимом по поверхности S, $B(t,x)$ — некоторая $n \times m$ матрица. Многозначность в правой части рассматриваемой системы может возникать в случае неопределенности возмущений или для разрывных систем с решениями в смысле Филиппова. Управления типа позиционно-импульсных привлекались к решению различных задач теории игр и управления, в частности, при построении позиционных импульсных управлений в вырожденных линейно-квадратичных задачах оптимального управления.

Что же касается процессов типа «скольжения», то в большей степени они являются атрибутом управляемых систем с разрывными позиционными управлениями (обратными связями) и теории разрывных систем в целом. Для разрывных управляемых систем скользящий режим является основным режимом функционирования в задачах стабилизации, слежения или полной управляемости. Установленная связь идеальных импульсно-скользящих режимов с релейными управлениями дает возможность рассматривать комбинации, состоящие из импульсных и обычных позиционных управлений, когда для последних в системе не хватает ресурсов управления.

В литературе можно встретить различные способы построения скачков импульсно-скользящего режима, где и сам этот термин используется в более широком смысле. Если в системе (1) матрица $B(t,x)$ возникает в результате построения управления для системы (2), то в данной работе исследуются также импульсно-скользящие режимы, когда матрица при управлении является атрибутом исходной системы. Тогда решение, основанное на определении реакции системы на импульсное управление, строится с помощью замыкания множества гладких решений в пространстве функций ограниченной вариации, что является естественным с точки зрения теории управления.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00371).

К ВОПРОСУ ИДЕНТИФИЦИРУЕМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

В.Е. Хартовский

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы,

Гродно, Беларусь

hartovskij@grsu.by

Объект исследования – линейная автономная вполне регулярная дифференциально-алгебраическая система с последействием Σ:

$$\frac{d}{dt}\big(Dx(t)\big) = \sum_{i=0}^{m} A_i x(t-ih), \tag{1}$$

$$y(t) = C_i x(t-ih), \quad t > 0, \tag{2}$$

где x — решение уравнения (1), y — наблюдаемый выход; $h = \mathrm{const} > 0$, D, $A_i, \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $C_i \in \mathbb{R}^{l\times n}$. Решение системы (1) однозначно определяется начальным условием $x(t) = \eta(t), \quad t \in [-mh, 0]$, где η — непрерывная функция, которая предполагается неизвестной. Обозначим $\operatorname{rank} D = n_1$, $n_2 = n - n_1$. Систему (1), (2) назовем вполне регулярной, если $\deg|pD - A_0| = n_1$.

Под решением системы (1), (2) будем понимать в общем случае кусочно-непрерывную функцию $x(t), t \geq -mh$, удовлетворяющую уравнению (1) почти всюду и такую, что $x(t) = \eta(t)$, $t \in [-mh, 0]$, а функция $Dx(t)$ непрерывна $t \geq -mh$ и дифференцируема при $t > 0$.

Пусть $x(t)$, $t > -mh$, — решение системы (1), (2). Тогда состоянием системы (1), (2) в момент времени $t > 0$ будем считать функцию $x_t(\tau) = x(t+\tau)$, $\tau \in [-mh, 0]$.

Определение 1. *Будем говорить, что система* (1), (2) *полностью идентифицируема, если существуют момент времени* $t_1 > 0$ *и непрерывный оператор* $\mathfrak{L}_{t_1}$ *такой, что*

$$x_{t_1} = \mathfrak{L}_{t_1} y, \quad y \in Y_{[0,t_1]},$$

где $Y_{[0,t_1]} = \big\{y(t),\, t \in [0, t_1]\big\}$ *— множество выходов* (2), *порожденных всевозможными начальными функциями* η.

Пусть $\Gamma_1 \in \mathbb{R}^{n_2 \times n}$, $\Gamma_2 \in \mathbb{R}^{n \times n_2}$ — матрицы фундаментальных систем решений алгебраических систем $\gamma_1 D = 0$ и $D\gamma_2 = 0$ соответственно (относительно неизвестных γ_i, $i = 1, 2$).

Теорема 1. *Для того чтобы система* (1), (2) *была полностью идентифицируема необходимо и достаточно выполнение двух условий*

$$1)\,\operatorname{rank}\begin{bmatrix} pD - \sum\limits_{i=0}^{m} A_i e^{-iph} \\ \sum\limits_{i=0}^{m} C_i e^{-iph} \end{bmatrix} = n, \quad p \in \mathbb{C};$$

$$2)\,\operatorname{rank}\begin{bmatrix} \Gamma_1 \left(\sum\limits_{i=0}^{m} A_i \lambda^i\right) \Gamma_2 \\ \left(\sum\limits_{i=0}^{m} C_i \lambda^i\right) \Gamma_2 \end{bmatrix} = n - \operatorname{rank} D, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Далее в докладе обсуждается схема построения оператора $\mathfrak{L}_{t_1}$ и ее применение для решения задач управления линейной вполне регулярной дифференциально-алгебраической системой с последействием.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ "Конвергенция — 2025".

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ В СИСТЕМАХ С ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ

Д.Я. Хусаинов[1], Ж.И. Буранов[2], А.С. Сиренко[1]

[1] Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, Украина
d.y.khusainov@gmail.com, sandrew@online.ua

[2] Академический лицей Ташкентского государственного технического университета имени И. Каримова, Ташкент, Узбекистан
juventus88.60.94@mail.ru

Введение. В работе рассматриваются условия устойчивости динамических систем с переключениями, состоящими из дифференциальных и разностных подсистем [1]. В настоящей работе при исследовании устойчивости используется метод функций Ляпунова. При использовании второго метода Ляпунова этот факт можно установить за счет монотонного убывания (или возрастания) “синтезированного решения” вдоль некоторой функции.

Системами с переключениями будем называть системы, состоящие из динамических подсистем, представляющих дифференциальные подсистемы, функционирующие на заданных промежутках времени и разностные, определяющие переключение в дифференциальных подсистемах. Динамику системы можно записать в виде $S(F,G,T) =$

$$= \{S_{ni}(f_{ni}), i \in I, S_{nj}(g_{nj}), j \in J, T : t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n < ...\},$$

$$S_{ni}(f_{ni}) : x' = f_{ni}(t,x), t_{n-1} \le t < t_n, i \in I = (I_1, I_2, ...I_n, ...),$$

$$S_{nj}(g_{nj}) : x(t_n) = g_{nj}(t_n - 0, x(t_n - 0)), j \in J = (J_1, J_2, ...J_n, ...).$$

$$T : t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n < ...$$

и начальными условиями $x(t_0) = x_0$. Будем считать, что функции $f_{ni}(x,t)$, $i \in I = (I_1, I_2, ...I_n, ...)$ и $g_{nj}(x,t)$, $j \in J = (J_1, J_2, ...J_n, ...)$ принадлежат некоторым классам функций $f_{ni}(x,t) \in \Phi$, $g_{nj}(x,t) \in \Gamma$ и удовлетворяют нулевым условиям, т.е. $x(t) \equiv 0$ является решением системы. Если разностная часть в системах с переключениями отсутствует, т.е. систем описывается только подсистемами дифференциальных уравнений, а в точках переключения *сохраняется непрерывность*, то систему будем называть системой с непрерывными переключениями. Предлагается рассматривать два вида систем:

1. Системы, у которых последовательность моментов времени $T : t_0 < ... < t_n < ...$ и функции $f_{ni}(x,t) \in \Phi$ известны. Системы такого вида будем называть системами с *определенными переключениями.*

2. Системы, у которых последовательность моментов времени переключений $T : t_0 < ... < t_n < ...$ и функции $f_{ni}(x,t) \in \Phi$, $g_{nj}(x,t) \in \Gamma$ или не известны, или их надо каким либо образом определять. В системе с переключениями имеются три неопределенности: в классах дифференциальных подсистем, в классах разностных и во временах переключений. Такие системы называются системами с *неопределенными переключениями.*

1. Использование метода “сшивания” функций Ляпунова для систем с определенными переключениями. Если известны моменты переключений и виды подсистем, функционирующие на отдельных участках, то основная идея использования второго метода Ляпунова для систем с определенными переключениями заключается в построении для каждого участка *отдельных* функций Ляпунова и *“сшивании”* их на отдельных участках.

2. Использование метода “общей” функции Ляпунова для систем с неопределенными переключениями. Основная идея использования 2-го метода Ляпунова для систем с неопределенными переключениями заключается в построении *“общей”* функции Ляпунова. В этом случае условия асимптотической устойчивости и оценки сходимости можно получить используя метод “общей” функции Ляпунова.

Функция $V(x,t)$ называется *“общей”* функцией Ляпунова для системы с переключениями, если она удовлетворяет следующим условиям:

1. Функция $V(x,t)$ является положительно определенной, т.е. $V(0,t) \equiv 0$ и $\omega_1(|x|) \leq V(x,t) \leq \omega_2(|x|)$, где $\omega_1(x)$, $\omega_2(x)$ положительно определенные функции.

2. Функция $V(x,t)$ убывает вдоль решений системы, т.е. при произвольных $\bar{t} < \bar{\bar{t}}$ имеет место неравенство $V\left(x(\bar{\bar{t}}), \bar{\bar{t}}\right) < V\left(x(\bar{t}), \bar{t}\right)$.

Библиографические ссылки

1. *Хусаинов Д.Я., Бычков А.С., Сиренко А.С.* Устойчивость нулевого решения системы с переключениями, состоящей из линейных подсистем // Журнал обчислювальної та прикладної математики. 2020. В. 1 (133). С. 89–96.
2. *Diblik J., Khusainov D.Ya., Bastinec J., Sirenko A.S.* Exponential stability of perturbed linear discrete systems // Advances in Difference Equations. 2016. No. 2. P. 1–20.

О СТАБИЛИЗАЦИИ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ПЕРЕВЕРНУТОГО МАЯТНИКА БЕЗ ИЗМЕРЕНИЯ СКОРОСТЕЙ

Д.Х. Хусанов[1], З.С. Юсупова[2]

[1] Джизакский политехнический институт, Джизак, Узбекистан
d.khusanov1952@mail.ru

[2] Национальный Университет им. Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан
Ziyusupova9797@gmail.com

1. Основная часть. В докладе рассматривается задача о стабилизации математического маятника в верхнем неустойчивом положении за счет момента U, приложенного к его оси. При этом имеется возможность измерять лишь отклонение маятника от вертикали без измерения производной по времени этого отклонения или угловой скорости маятника [1, 2].

Обозначим угол отклонения маятника от вертикали через φ. Нормируя соответствующим образом масштабы времени и координат, уравнения возмущенного движения можно записать в виде [1]

$$\frac{d\varphi}{dt} = \psi, \quad \frac{d\psi}{dt} = \sin\varphi + U. \tag{1}$$

Сигнал обратной связи измеряется в виде $y = \sin\varphi$. Эта задача решалась в работе [1], где найден стабилизирующий закон регулирования в виде решения уравнения

$$\begin{gathered}\frac{dU}{dt} = -4,6116y(t) - 3,1974U(t) - \\ -4,6116\int_{t-1}^{t}[(7,358ch(\tau-t)+4,329sh(\tau-t))y(\tau)+ \\ +U(\tau-t)\int_{t-1}^{t+\tau}(7,358ch(\eta-t)+4,328sh(\eta-t))sh(\eta-\tau)d\eta]\,d\tau.\end{gathered} \tag{2}$$

Закон управления (2) представляется достаточно сложным для практической реализации. В докладе показано, что рассматриваемая задача о стабилизации решается управлением вида

$$U = -\left(a - \frac{1}{2}g(t)\right)\sin\frac{\varphi(t)}{2} + \cos\frac{\varphi(t)}{4}\int\limits_{t-h(t)}^{t} p(\tau-t)\sin\frac{\varphi(\tau)}{4}d\tau, \tag{3}$$

где параметры управления задаются условиями

$$\begin{gathered}a > 1,\ g(t) = \int\limits_{-h(t)}^{0} p(s)ds,\ 0 < h_0 \le h(t) \le h_1, \\ p(s) > 0,\ p'(s) = \tfrac{dp(s)}{ds} < 0\ \forall s \in [-h_1, 0].\end{gathered}$$

Задача решается построением функционала Ляпунова

$$\begin{gathered}V = \tfrac{1}{2}\psi^2(t) + (a-1)(1-\cos\tfrac{\varphi(t)}{2}) + \\ +\tfrac{1}{2}\int\limits_{t-h(t)}^{t} p(\tau-t)\left(\sin\tfrac{\varphi(t)}{4} - \sin\tfrac{\varphi(\tau)}{4}\right)^2 d\tau.\end{gathered}$$

Несложно видеть, что этот функционал является определенно-положительным, допускающим бесконечно малый высший предел относительно переменных φ и ψ.

Для его производной имеет место оценка

$$\dot{V} \leq -\int\limits_{t-h}^{t} p'(\tau - t)\left(\sin\frac{\varphi(t)}{4} - \sin\frac{\varphi(\tau)}{4}\right)^2 d\tau \leq 0.$$

Множество $\{\dot{V} = 0\}$ может содержать лишь движения $\varphi(t) = const$, или $\dot{\psi} \equiv 0$, $\varphi(t) = 2\pi k,\ k \in Z$.

Согласно теоремам из [3, 4] получаем, что управление (3) решает поставленную задачу о стабилизации, при этом верхнее положение маятника является глобально притягивающим.

Библиографические ссылки

1. *Красовский Н.Н.* О стабилизации неустойчивых движений дополнительными силами при неполной обратной связи // Прикладная математика и механика. 1963. Т. 27, No 4. С. 641–663.
2. *Andreev A.S., Peregudova O.A.* Stabilization of the preset motions of a holonomic mechanical system without velocity measurement // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2017. Vol. 81, No. 2. P. 95–105.
3. *Андреев А.С., Хусанов Д.Х.* К методу функционалов Ляпунова в задаче об устойчивости и неустойчивости // Дифференциальные уравнения, 1998. Т. 34. № 7. С. 876–885.
4. *Хусанов Д.Х.* О конструктивной и качественной теории функционально-дифференциальных уравнений (монография). Ташкент: Издательство ФАН АН РУз, 2002. 256 с.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ СЕМЕЙСТВА НЕЛИНЕЙНЫХ ТРЕХМЕРНЫХ ДИССИПАТИВНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ХАОТИЧЕСКИМ ПОВЕДЕНИЕМ

В.В. Цегельник

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники,

Минск, Беларусь

tsegvv@bsuir.by

В работе [1] с помощью компьютерного моделирования установлено наличие хаоса (в частности, странных аттракторов) в системах дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = y^2 - x + Az,\ \dot{y} = x,\ \dot{z} = y, \tag{1}$$

$$\dot{x} = yz - x + Ay,\ \dot{y} = z,\ \dot{z} = x, \tag{2}$$

$$\dot{x} = y^2 + Az,\ \dot{y} = x - y,\ \dot{z} = y, \tag{3}$$

$$\dot{x} = yz + Az,\ \dot{y} = x - y,\ \dot{z} = x, \tag{4}$$

$$\dot{x} = yz + Az,\ \dot{y} = x - y,\ \dot{z} = y, \tag{5}$$

$$\dot{x} = -x + y + A,\ \dot{y} = xz,\ \dot{z} = y, \tag{6}$$

$$\dot{x} = yz - x,\ \dot{y} = z + A,\ \dot{z} = x, \tag{7}$$

$$\dot{x} = -x + z,\ \dot{y} = x + A,\ \dot{z} = xy, \tag{8}$$

$$\dot{x} = -x + z,\ \dot{y} = z + A,\ \dot{z} = xy \tag{9}$$

при определенных значениях параметра A. Каждая из систем (1)–(9) является диссипативной. Ниже будем считать независимую переменную t комплексной. Целью работы является исследование характера подвижных (зависящих от начальных условий) особых точек решений системы (1)–(9). Системы (уравнения), общие решения которых не имеют подвижных критических особых точек, называют системами (уравнениями) Пенлеве–типа или P-типа.

Теорема 1. *Системы* (1), (3) *эквивалентны уравнению*

$$\dddot{y} + \ddot{y} - 2y\dot{y} - Ay = 0, \tag{10}$$

а системы (7), (8) *— уравнению*

$$\dddot{y} + \ddot{y} - y\dot{y} + Ay = 0. \tag{11}$$

Системы (2), (4), (5), (6), (9) *эквивалентны соответственно уравнениям*

$$\dddot{y} + \ddot{y} - y\dot{y} - Ay = 0, \tag{12}$$

$$z\dddot{z} - \dot{z}\ddot{z} = z^2\dot{z} - z\ddot{z} + Az^2, \tag{13}$$

$$\dddot{z} + \ddot{z} - z\dot{z} + Az = 0. \tag{14}$$

$$z\dddot{z} - \dot{z}\ddot{z} = z\ddot{z} + z^2\dot{z} + Az^2, \tag{15}$$

$$y\dddot{y} - \dot{y}\ddot{y} = y\ddot{y} + y^2\dot{y} - Ay^2. \tag{16}$$

Теорема 2. *Ни одно из уравнений* (10)–(12), (14) *не является уравнением Пенлеве–типа.*

Справедливость данного утверждения следует из того, что ни одно из уравнений (10)–(12), (14) не входит в список [2] уравнений $\dddot{u} = P(t, u, \dot{u}, \ddot{u})$, где P — многочлен относительно u, $\dot{u}$, $\ddot{u}$ с аналитическими по t коэффициентами, общие решения которых свободны от подвижных критических особых точек.

Следствие 1. *Ни одна из систем* (1)–(3), (5), (7), (8) *не является системой P–типа.*

Библиографические ссылки

1. *Zhang Fu, Heidel J.* Chaotic and nonchaotic behavior in three-dimensional quadratic systems: 5-1 dissipative cases // Int. Journal of Bifurcation and Chaos. 2012. Vol. 22. № 1. 1250010.
2. *Cosgrove C.M.* Chazy classes IX – XI of third-order differential equations // Stud. Appl. Math. 2001. Vol. 104. No. 3. P. 171–228.

О ПРИБЛИЖЕНИИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ С ПОСТОЯННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

О.Б. Цехан

Гродненский государственный университет им. Янки Купалы, Гродно, Беларусь
tsekhan@grsu.by

Рассматривается линейная стационарная сингулярно возмущенная система с запаздыванием:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_{10}x(t) + A_{11}x(t-h) + A_2 y(t),\ x \in \mathbb{R}^{n_1},\ y \in \mathbb{R}^{n_2}, \\ \mu\dot{y}(t) &= A_{30}x(t) + A_{31}x(t-h) + A_4 y(t),\ t \in T = [0, t_1], \end{aligned} \tag{1}$$

$$x\,(0) = x_0,\ y_0(0) = y_0,\ x(\theta) = \phi(\theta), \theta \in [-h, 0)\,. \tag{2}$$

Здесь $A_{ij},\ i = 1, 3, j = 0, 1, A_k, k = 2, 4,$ — постоянные матрицы подходящих размеров; $h > 0$ — постоянное запаздывание; $x_0 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $y_0 \in \mathbb{R}^{n_2}$, $\varphi(\theta)$ — непрерывная n_1–вектор-функция; μ — малый параметр, $\mu \in (0, \mu^0]$, $\mu^0 \ll 1$.

Пусть $p \overset{\Delta}{=} \frac{d}{dt}$ — оператор дифференцирования, e^{-ph} — оператор запаздывания: $e^{-ph}v(t) = v(t-h)$. В результате замены переменных в системе (1) с помощью невырожденного преобразования $T(\mu, e^{-ph})$ [1, 2]

система (1) преобразуется в систему с разделенными движениями, которая для достаточно малых $\mu > 0$ асимптотически аппроксимируется с точностью $O(\mu^2)$ системой

$$\begin{aligned} \dot{\xi}^1(t) &= A_{0\xi}(\mu)\xi^1(t) + A_{1\xi}(\mu)\xi^1(t-h) + A_{2\xi}(\mu)\xi^1(t-2h), \\ \mu\dot{\eta}^1(t) &= A_{0\eta}(\mu)\eta^1(t) + A_{1\eta}(\mu)\eta^1(t-h),\ \xi^1 \in \mathbb{R}^{n_1},\ \eta^1 \in \mathbb{R}^{n_2}, \end{aligned} \tag{3}$$

где $A_{0\xi}(\mu) = A_{10} - A_2(L_0^0 + \mu L_0^1)$, $A_{1\xi}(\mu) = A_{11} - A_2(L_1^0 + \mu L_1^1)$, $A_{2\xi}(\mu) = \mu L_2^1$, $A_{0\eta}(\mu) = (A_4 + \mu L_0^0 A_2)$, $A_{1\eta}(\mu) = \mu L_1^0 A_2$, а матрицы L_j^i, H_j^i рекуррентно вычисляются через матрицы системы (1).

Теорема 1. *Если* $Re\lambda(A_4) < 0$, *то для достаточно малых* $\mu > 0$ *решение системы* (1), (2) *аппроксимируется для любых* $t > 0$

$$\begin{aligned} &x(t) = \xi^1(t) + \mu H_0^0\eta^1(t) + O(\mu^2), \\ &y(t) = (E_{n_2} - \mu L_0^0 H_0^0)\eta^1(\tfrac{t}{\mu}) - \mu L_1^0 H_0^0 \eta^1(\tfrac{t-h}{\mu}) - (L_0^0 + \mu L_0^1)\xi^1(t) + \\ &+(L_1^0 + \mu L_1^1)\xi^1(t-h) - \mu L_2^1 \xi^1(t-2h) + O(\mu^2), \end{aligned}$$

где $\xi^1(t), \eta^1(t)$ *– решения системы* (3) *с начальными условиями*

$$\begin{aligned} &\xi^1(0) = x_0 - \mu H_0^0(y_0 + L_0^0 x_0 + L_1^0\phi(-h)), \\ &\xi^1(\theta) = \phi(\theta) - \mu H_0^0(\psi(\theta) + L_0^0\phi(\theta) + L_1^0\phi(\theta - h)),\ \theta \in [-2h, 0), \\ &\eta(0) = y_0 + (L_0^0 + \mu L_0^1)x_0 + (L_1^0 + \mu L_1^1)\phi(-h) - \mu L_2^1\phi(-2h), \\ &\eta(\theta) = \psi(\theta) + (L_0^0 + \mu L_0^1)\phi(t) + (L_1^0 + \mu L_1^1)\phi^1(t-h),\ \theta \in [-h, 0), \end{aligned}$$

а $\phi(\theta)$, $\theta \in [-h, 0)$, $\psi(\theta)$, $\theta \in [-3h, 0)$ *удовлетворяют системе*

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(\theta) &= A_{10}\phi(\theta) + A_{11}\phi(\theta - h) + A_2\psi(\theta), \\ \mu\dot{\psi}(t) &= A_{30}\phi(\theta) + A_{31}\phi(\theta - h) + A_4\psi(\theta),\ \theta \in [-2h, 0). \end{aligned}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы проводится по схеме доказательства теоремы 5.2 [3] с использованием метода шагов решения дифференциальных уравнений с запаздыванием. В частном случае, при отсутствии в (1) членов с запаздыванием, утверждение теоремы совпадает с теоремой 5.2 [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь в рамках Государственной программы научных исследований Республики Беларусь “Конвергенция-2025”, код задания 1.2.04.4.

Библиографические ссылки

1. *Цехан О.Б.* Расщепляющее преобразование для линейной стационарной сингулярно возмущенной системы с запаздыванием и его применение к анализу и управлению спектром // Веснік ГрДУ імя Янкі Купалы. Сер 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2017. Т. 7. № 1. С. 50–61.
2. *Tsekhan O.B.* Complete controllability conditions for linear singularly perturbed time-invariant systems with multiple delays via Chang-type transformation // Axioms. 2019. Vol. 8. No 71. P. 1–19.
3. *Kokotovic P.V., Khalil H.K., O'Reilly J.* Singular Perturbations Methods in Control: Analysis and Design. NY: Academic Press, 1999.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ИГРА СБЛИЖЕНИЯ-УКЛОНЕНИЯ: ПРОБЛЕМА РЕЛАКСАЦИИ И КОНСТРУКЦИИ МЕТОДА ПРОГРАММНЫХ ИТЕРАЦИЙ

А.Г. Ченцов

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия

Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия
chentsov@imm.uran.ru

Рассматривается нелинейная дифференциальная игра (ДИ) сближения-уклонения на конечном промежутке времени; для данной игры Н.Н. Красовским и А.И. Субботиным была установлена фундаментальная теорема об альтернативе (см. [1, 2]), на основе которой для типичных функционалов качества были получены [2] утверждения о существовании седловой точки в соответствующих классах позиционных стратегий. В упомянутой ДИ предполагались заданными два замкнутых множества в пространстве позиций: целевое множество (ЦМ) и множество, определяющее фазовые ограничения (ФО). На основе конструкций метода программных итераций (МПИ) [3–5] удалось установить [6] свойство альтернативной разрешимости ДИ сближения-уклонения в случае, когда множество, определяющее ФО, может быть незамкнутым, но имеет замкнутые сечения (при этом требуется некоторая коррекция классов стратегий); в связи с работами по МПИ отметим [7, 8]. Данный случай ДИ рассматривается в докладе.

Исследуются релаксации игровой задачи сближения: исходная пара множеств — параметров игры — заменяется окрестностями, определяемыми по-разному, что отвечает топологиям пространства позиций, в которых ЦМ и множество, определяющее ФО, замкнуты. Фиксируется параметр приоритетности, определяющий соотношение размеров окрестностей упомянутых множеств и задающий пропорциональное ослабление ФО при каждом конкретном ослаблении условий прихода на ЦМ. Наименьший размер окрестности ЦМ, при котором для фиксированной позиции игрок, заинтересованный в сближении, гарантирует его осуществимость в классе квазистратегий (неупреждающих стратегий), оказывается ценой ДИ на минимакс-максимин специального функционала качества. Данный функционал учитывает как обстоятельства, связанные с приходом на ЦМ, так и "степень соблюдения" ФО. Упомянутое значение — цена игры — определяется посредством варианта МПИ [4, 5]. В результате реализуется функция позиции, которую называем основной; она оказывается пределом последовательности функций, реализуемых на каждом этапе упомянутого варианта МПИ на пространстве множеств, точками которых являются позиции игры. Указывается, однако, "программный" оператор на пространстве функций позиции, который реализует и упомянутую последовательность, и ее предел. Более того, этот предел — основная функция — оказывается неподвижной точкой вышеупомянутого оператора, экстремальной в порядковом смысле. Тем самым реализуется новый вариант МПИ.

Рассматривается зависимость основной функции от параметра приоритетности. Установлено следующее свойство непрерывности: основная функция, рассматриваемая как отображение положительной полуоси в тихоновскую степень данной полуоси (позиции образуют индексное множество), реализует непрерывное отображение. При фиксации позиции указываются "пределы", обеспечивающие равномерную непрерывность сечений основной функции при изменении параметра приоритетности.

Библиографические ссылки

1. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Альтернатива для игровой задачи сближения // Прикладная математика и механика. 1970. Т. 34. № 6. С. 1005–1022.
2. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. *Ченцов А.Г.* О структуре одной игровой задачи сближения // Докл. АН СССР. 1975. Т. 224. № 6. С. 1272–1275.
4. *Ченцов А.Г.* К игровой задаче наведения // Докл. АН СССР. 1976. Т. 226. № 1. С. 73–76.
5. *Ченцов А.Г.* Метод программных итераций в игровой задаче наведения // Тр. ИММ УрО РАН. 2016. Т. 22. № 2. С. 304–321.

6. *Ченцов А.Г.* Некоторые вопросы теории дифференциальных игр с фазовыми ограничениями // Изв. ИМИ УдГУ. 2020. Т. 56. С. 138–184.
7. *Чистяков С.В.* К решению игровых задач преследования // Прикладная математика и механика. 1977. Т. 41. № 5. С. 825–832.
8. *Ухоботов В.И.* Построение стабильного моста для одного класса линейных игр // Прикладная математика и механика. 1977. Т. 41. № 2. С. 358–364.

О ГЛОБАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ КУСОЧНО-АФФИННЫХ ФУНКЦИЙ

Г.С. Шульга

Академический лицей ФТШ им. Ж.И. Алфёрова, Санкт-Петербург, Россия
gdextrous@gmail.com

1. Введение. В данной работе исследуется задача глобальной оптимизации кусочно-аффинных функций, т.е. задача вида

$$f(x) = \max_{i\in 1:s}(x^T a_i - b_i) + \min_{j\in 1:p}(x^T u_j - v_j) \longrightarrow \inf, \tag{1}$$

где x, a_i, $u_i \in \mathbb{R}^n$, b_i, $v_i \in \mathbb{R}$.

Воспользуемся некоторыми сведениями из теории конструктивного негладкого анализа (см., например, [1]).

Определение 1. *Функция g называется кодифференцируемой, если для любой точки z из её области определения найдётся пара выпуклых компактов $\underline{d}g(z)$, $\overline{d}g(z)$ таких, что справедливо разложение:*

$$g(z+\Delta) = g(z) + \max_{[a,v]\in \underline{d}g(z)}(a + \Delta^T v) + \min_{[b,w]\in \overline{d}g(z)}(b + \Delta^T w) + o\left(||\Delta||, z\right).$$

Множества $\underline{d}g(z)$, $\overline{d}g(z)$ называются гиподифференциалом и гипердифференциалом функции g в точке z соответственно, а пара множеств $Dg(z) \triangleq [\underline{d}g(z), \overline{d}g(z)]$ — кодифференциалом функции g в точке z.

Очевидно, что кодифференциал функции g в точке z определяется не единственным образом. В случае, если $Dg(z)$ обеспечивает кодифференциальное разложение без члена $o\left(||\Delta||, z\right)$, он называется глобальным кодифференциалом (см. [2]), а функция g — глобально кодифференцируемой в точке z.

Для любой кодифференцируемой функции справедлива следующие утверждение.

Теорема 1. *Пусть точка z^* является точкой локального минимума функции g, а $Dg(z^*) = [\underline{d}g(z^*), \overline{d}g(z^*)]$ — произвольный кодифференциал функции g в точке z^*. Тогда*

$$(0, \mathbb{O}) \in \underline{d}g(z^*) + \{(0, w)\} \quad \forall (0, w) \in \overline{d}g(z^*).$$

Заметим, что исследуемая функция f (см. (1)) является кодифференцируемой, и более того, глобально кодифференцируемой. Выпишем явный вид глобального гиподифференциала $\underline{d}^* g(z)$ и гипердифференциала $\overline{d}^* g(z)$:

$$\underline{d}^* g(z) = \operatorname*{conv}_{k \in 1:s} \left\{ \begin{pmatrix} x^T a_k - b_k - \max\limits_{i \in 1:s}(x^T a_i - b_i) \\ a_k \end{pmatrix} \right\},$$

$$\overline{d}^* g(z) = \operatorname*{conv}_{\ell \in 1:p} \left\{ \begin{pmatrix} x^T u_\ell - v_\ell - \min\limits_{j \in 1:p}(x^T u_j - v_j) \\ u_\ell \end{pmatrix} \right\}.$$

2. Основные результаты. Теорема 1, устанавливающая необходимое условие локального оптимума, может быть использована для поиска точек глобального оптимума лишь в случае выпуклости функции f. Данное обстоятельство было использовано в [3]. Однако, в рассматриваемой задаче про выпуклость функции f ничего не известно, а значит необходимо предложить отдельный критерий глобального оптимума в терминах кодифференциального исчисления. Это можно сделать только в том случае, когда функция является глобально кодифференцируемой. В данной работе формулируется и доказывается следующая теорема:

Теорема 2. *Точка z^* является точкой нестрогого глобального минимума глобально кодифференцируемой функции g тогда и только тогда, когда*

$$\forall y \in -\overline{d}^* g(z) \quad \exists\, \ell \geqslant 0 : \; y \in \underline{d}^* g(z) - \begin{pmatrix} \ell \\ \mathbb{O} \end{pmatrix}.$$

Применяя этот критерий непосредственно к f, можно показать, что исходная кусочно-аффинная функция достигает на $\mathbb{R}^n$ своего минимального значения только в том случае, если

$$\operatorname*{conv}_{j \in 1:p}\{-u_j\} \subset \operatorname*{conv}_{i \in 1:s}\{a_i\},$$

а само оптимальное значение f^* определяется из решения следующей минимаксной задачи со связанными ограничениями:

$$\begin{cases} \max\limits_{\mu}(-b\mu - v\nu) \longrightarrow \inf\limits_{\nu \in \Lambda_p}, \\ A\mu + U\nu = \mathbb{O}_n, \\ \mu \in \Lambda_s. \end{cases}$$

Здесь $A = (a_1 \dots a_s)$ и $U = (u_1 \dots u_p)$ — матрицы, Λ_s — стандартный симплекс в $\mathbb{R}^s$. С помощью теории двойственности в линейном программировании, в данной работе эта задача сводится к классической задаче билинейного программирования с несвязанными ограничениями, для которой уже известны методы как локального, так и глобального поиска. В частности, решению подобных вопросов посвящены публикации [5, 6].

Нахождение решений x^* исходной задачи, т.е. решений уравнения $f(x) = f^*$ можно переформулировать в виде «модифицированной» задачи о разделяющей гиперплоскости. В начале определим вспомогательные множества:

$$\Omega \triangleq \left\{ \left(\begin{smallmatrix} -b_i \\ a_i \end{smallmatrix} \right) \middle| i \in 1:s \right\}, \qquad H \triangleq \left\{ \begin{pmatrix} f^*+v_j \\ -u_j \end{pmatrix} \middle| j \in 1:p \right\},$$
$$S_+ \triangleq \left\{ q = \left(\begin{smallmatrix} q_x \\ q_0 \end{smallmatrix} \right) \middle| q \in \mathbb{R}^{n+1}, q_x > 0, \|q\| = 1 \right\}.$$

Так, необходимо найти такое направление $g \in S_+$, что

$$\exists h \in H: \quad \omega^T g \leqslant h^T g \quad \forall \omega \in \Omega.$$

С помощью методов, аналогичных указанным в [7], это также сводится к задаче билинейного программирования. Показывается, что всё множество решений соответствующей задачи билинейного программирования определяет всё множество решений исходной задачи.

Библиографические ссылки

1. *Демьянов В.Ф., Рубинов А.М.* Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука, 1990, 432 с.
2. *Долгополик М.В.* Метод кодифференциального спуска для кусочно-аффинных функций // Семинар «CNSA&NDO». Избранные доклады. 16 мая 2019 г.
3. *Тамасян Г.Ш., Шульга Г.С., Удот М.В.* О задаче минимизации суммы модулей аффинных функций // Процессы управления и устойчивость. 2019. Т. 6. № 1. С. 471—475.
4. *Демьянов В.Ф., Малозёмов В.Н.* Введение в минимакс. Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1972 г. 368 с.
5. *Стрекаловсий А.С., Орлов А.В.* Биматричные игры и билинейное программирование. М.: Физматлит, 2007. 224 с.

6. *Орлов А.В.* Численное решение задач билинейного программирования, Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2008. Т. 48. № 2. С. 237–254.
7. *Малозёмов В.Н., Чернэуцану Е.К.* Наилучшее линейное отделение двух множеств. Избранные лекции по экстремальным задачам. Ч. 1. Под ред. проф. В.Н. Малозёмова. Изд-во ВВМ, 2017. 470 с.

УСТОЙЧИВОСТЬ НУЛЕВОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМ АВТОНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Т. Ыскак

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия
istima92@mail.ru

В работе рассматривается система дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием следующего вида:

$$\frac{d}{dt}y(t) = Ay(t) + \int\limits_{t-\tau}^{t} B(t-s)y(s)ds, \tag{1}$$

где A — матрица размера $n \times n$, $B(s)$ — матрица размера $n \times n$ с непрерывными элементами при $s \in [0, \tau]$, $\tau > 0$ — параметр запаздывания.

Рассмотрим для системы (1) следующую начальную задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}y(t) = Ay(t) + \displaystyle\int\limits_{t-\tau}^{t} B(t-s)y(s)ds, \quad t > 0, \\ y(s) = \varphi(s), \quad s \in [-\tau, 0], \quad y(+0) = \varphi(0), \end{cases} \tag{2}$$

где $\varphi(s) \in C([-\tau, 0])$ — заданная вектор-функция.

Основной целью данной работы является исследование экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы (1) и получение оценок решений, характеризующих экспоненциальное убывание на бесконечности.

При исследовании устойчивости нулевого решения системы (1) используется функционал Ляпунова – Красовского, построенный на основе функционалов из [1, 2]:

$$v(t, y) = \langle Hy(t), y(t) \rangle + \int\limits_{0}^{\tau} \int\limits_{t-\eta}^{t} \langle K(t-s, \eta)y(s), y(s) \rangle \, ds d\eta.$$

Теорема 1. *Пусть существуют матрица $H = H^* > 0$ и матрица $K(s) = K^*(s) \in C^1([0,\tau])$ такая, что*

$$K(s) > 0, \quad \frac{d}{ds}K(s) < 0, \quad s \in [0,\tau],$$

при этом матрица

$$P = -HA - A^*H - \int\limits_0^\tau K(0,s)ds - H\Bigg[\int\limits_0^\tau B(s)K^{-1}(s,s)B^*(s)ds\Bigg]H$$

положительно определена. Тогда нулевое решение системы (1) *экспоненциально устойчиво.*

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Выберем число $k > 0$ такое, что*

$$\frac{d}{ds}K(s) + kK(s) \le 0, \quad s \in [0,\tau].$$

Тогда для решения начальной задачи (2) *справедлива следующая оценка:*

$$\|y(t)\| \le \|H^{-1}\|^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\gamma}{2}t} v^{\frac{1}{2}}(0,\varphi),$$

где

$$\gamma = \min\left\{\frac{p_{min}}{\|H\|}, k\right\},$$

$p_{min} > 0$ — минимальное собственное число матрицы P,

$$v(0,\varphi) = \langle H\varphi(0), \varphi(0)\rangle + \int\limits_0^\tau \int\limits_{-\eta}^0 \langle K(-s,\eta)\varphi(s), \varphi(s)\rangle\, ds d\eta.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №18-29-10086).

Библиографические ссылки

1. *Демиденко Г.В., Матвеева И.И.* Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2005. Т. 5. № 3. С. 20–28.
2. *Yskak T.* Stability of solutions to systems of differential equations with distributed delay // Functional Differential Equations. 2018. Vol. 25. No. 1–2. P. 97–108.

МОДАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОДНОЙ ТРЕХМЕРНОЙ СИСТЕМОЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА В СЛУЧАЕ КРАТНЫХ КОРНЕЙ

А.А. Якименко

Белорусский государственный технологический университет, Минск, Беларусь
yakimenko@belstu.by

Рассмотрим линейную стационарную систему с запаздывающим аргументом нейтрального типа с одним входом и одним запаздыванием по состоянию:

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t-h) + A_2\dot{x}(t-h) + bu(t), \tag{1}$$

где $A_i, i = 0, 1, 2$ – постоянные 3×3-матрицы; $h > 0$ — постоянное запаздывание; b — ненулевой 3-вектор. Не ограничивая общности, считаем $b' = [0, 0, 1]$("$'$"означает транспонирование).

Присоединим к системе (1) регулятор вида

$$u(t) = q'_{00}x(t) + \sum_{i=0}^{L}\sum_{j=1}^{M} q'_{ij}x^{(i)}(t-jh) + \int_{-h}^{0} g'(s)x(t+s)ds, \tag{2}$$

где q_{00}, q_{ij} — 3-векторы; $g'(s)$ — непрерывная 3-вектор-функция; $x^{(i)}(t) \overset{def}{=} \frac{d^i}{dt^i}x(t), (x^{(0)}(t) \equiv x(t))$.

Характеристическое уравнение системы (1) имеет следующий вид:

$$\det\left[A_0 + A_1e^{-\lambda h} + A_2\lambda e^{-\lambda h} - \lambda I_3\right] \equiv \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} \tilde{\alpha}_{ij}\lambda^i e^{-j\lambda h} = 0, \tag{3}$$

где числа $\tilde{\alpha}_{ij}$ вычисляются как функции матриц $A_i, i = 0, 1, 2$, в частности, $\tilde{\alpha}_{00} = \det A_0, \tilde{\alpha}_{30} = 1, \tilde{\alpha}_{33} = \det A_2$.

Определение 1. *Система* (1) *будет модально управляема регулятором вида* (2), *если для любых наперёд заданных чисел* $\alpha_{ij}, i = 0, 1, 2, j = 0, 1, 2, \alpha_{20} = 1, \alpha_{3j}, j = 0, 1, 2$ *найдется регулятор* (2) *такой, что характеристическое уравнение замкнутой системы* (1), (2) *имеет вид*

$$\det\left[A_0 + A_1e^{-\lambda h} + A_2\lambda e^{-\lambda h} - \lambda I_3 + bU(\lambda)\right] \equiv$$

$$\equiv \left(\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2} \alpha_{ij}\lambda^i e^{-j\lambda h}\right) \times (\alpha_{30} + \alpha_{31}e^{-j\lambda h} + \alpha_{32}\lambda e^{-j\lambda h} + \lambda) = 0.$$

Введем (3×3)-матрицы:

$$\mathcal{A}(\lambda) = A_0 + A_1 e^{-\lambda h} + A_2 \lambda e^{-\lambda h},$$

$$W(\lambda) = \left[A^2(\lambda)b, A(\lambda)b, b\right], \lambda \in \mathbb{C}.$$

Рассмотрим общециклический случай:

$$\det W(\lambda) = c(\gamma_0 + \gamma_1 e^{-\lambda h} + \lambda e^{-\lambda h}), (c \neq 0).$$

Пусть матрица $\mathcal{A}(\lambda)$ имеет следующий вид:

$$\mathcal{A}(\lambda) = \begin{bmatrix} \beta_0 + \beta_1 e^{-\lambda h} + \beta_2 \lambda e^{-\lambda h} & c(\gamma_0 + \gamma_1 e^{-\lambda h} + \lambda e^{-\lambda h}) & 0 \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & 1 \\ a_{31}(\lambda) & a_{32}(\lambda) & a_{33}(\lambda) \end{bmatrix} \equiv$$

$$\equiv \begin{bmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & 0 \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & 1 \\ a_{31}(\lambda) & a_{32}(\lambda) & a_{33}(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Здесь $\beta_i, i = 0, 1, 2, c, \gamma_0$ — некоторые действительные числа; $a_{ij}(\lambda)$, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3$ — квазиполиномы:

$$a_{ij}(\lambda) = a_{ij0} + a_{ij1} e^{-\lambda h} + a_{ij2} \lambda e^{-\lambda h},$$

где $a_{ijk} \in \mathbb{R}; k = 0, 1, 2.$

Рассмотрим уравнение

$$\lambda^2 + (\gamma_1 - \beta_0)\lambda + \beta_1 \gamma_0 - \beta_0 \gamma_1 \equiv (\lambda - \xi_1)(\lambda - \xi_2) = 0, \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}.$$

Пусть выполнено условие $\xi_1 = \xi_2 = \xi$. Рассмотрим величину

$$\delta\,(\xi) = \beta_0 + \beta_1 e^{-\xi h} - \xi.$$

Справелива следующая

Теорема 1. *Для того, чтобы система* (1) *была модально управляема регулятором* (2) *в общециклическом случае при кратных корнях, необходимо и достаточно выполнения условия* $\delta\,(\xi) \neq 0$.

СОДЕРЖАНИЕ/CONTENTS

Научное издание

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ: УСТОЙЧИВОСТЬ, УПРАВЛЕНИЕ, ОПТИМИЗАЦИЯ

Материалы Международной научной конференции
памяти профессора Р. Ф. Габасова

Минск, 5—10 октября 2021 г.

DYNAMICAL SYSTEMS: STABILITY, CONTROL, OPTIMIZATION

Proceedings of the International Scientific Conference
in memory of Professor R. F. Gabasov

Minsk, October 5—10, 2021

На русском и английском языках

В авторской редакции

Ответственный за выпуск *О. И. Костюкова*
Компьютерная верстка *Н. С. Павленок*

Подписано в печать 30.09.2021. Формат 60х84/16. Бумага офсетная.
Ризография. Усл. печ. л. 12,56. Уч.-изд. л. 10,44.
Тираж 80 экз. Заказ 264.

Белорусский государственный университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/270 от 03.04.2014.
Пр. Независимости, 4, 220030, Минск.

Республиканское унитарное предприятие
«Издательский центр Белорусского государственного университета».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 2/63 от 19.03.2014.
Ул. Красноармейская, 6, 220030, Минск.